

ユークリッド空間における標準的三角形分割アルゴリズム

橋本 直樹

(平成 20 年 10 月 4 日受理)

A Canonical Triangulation Algorithm in Euclidean Space

HASHIMOTO, Naoki

(Received on October 4, 2008)

キーワード : 三角形分割、連分数

Key words : Triangulation, continuous fraction

1. はじめに

一般に三角形分割の方法は、純粋数学、数値解析、コンピュータグラフィックスなどの多方面に用いられている。位相幾何学では多様体の位相構造を知るために三角形分割が用いられ、そして位相不変量はその分割を通して容易に得られる。同様の手法は、特異点を持つ代数多様体や複素解析多様体にも適用^{1,2,3)}され、近年は三角形分割の研究に組み合わせ理論も応用されている。一方、三角形分割を実際に行う計算方法も多くの人々により研究されている⁴⁻⁶⁾。これらは、数値解析におけるメッシュ生成やコンピュータグラフィックスの分野で多く研究されている。低次元のユークリッド空間では、コンピュータ上でその三角形分割を可視化出来るため多くのコンピュータアルゴリズムが開発されている⁶⁾。

本論文は、文献[1]の方法によりユークリッド空間内での三角形分割アルゴリズムの存在を示す。その文献は、複素解析特異点の分野において GAGA の原理を通して代数化した対象を双対 Newton 図形で表現し三角形分割することにトポロジカルな方法を取っているため、その方法をユークリッド空間内で再構成する。本稿では第2節で準備をし、第3節で、ユークリッド空間の整数環 \mathbf{Z} 上の複体の錐体分割を構成する。そして、その分割を有理数体 \mathbf{Q} 上に拡張することにより、線分の標準的部分分割を得る。第4節では、より高次元ユークリッド空間での標準的三角形分割を示す。我々の方法は、主に線形代数だけを用いており、原点に対する三角形分割錐の体積も容易に計算できるため、混合体積の計算やコンピュータグラフィックスにおけるボリュームレンダリングに応用できると考えられる。

2. 準備

\mathbf{N}^+ を \mathbf{R}^{n+1} の正の整数ベクトル空間とする。 \mathbf{N}^+ のベクトルは列ベクトルで記す。

$P = {}^t(p_0, \dots, p_n)$ を \mathbf{N}^+ の整数ベクトルとする。 P が任意の i ($0 \leq i \leq n$) に対し、 $p_i > 0$ のとき強正(strictly positive)といい、また、任意の p_i が互いに素のとき、その整数ベクトルは原始的(primitive)で

あるという。 $P_i = {}^t(p_{0i}, p_{1i}, \dots, p_{ni}) \quad (i = 1, \dots, k) \quad (1 \leq k \leq n+1)$ を \mathbf{N}^+ の与えられた整数ベクトル

とする。このとき、 P_1, \dots, P_n の行列式 $\det(P_1, \dots, P_k)$ を行列 (p_{ji}) のすべての $k \times k$ 小行列式の最大公約数と定義する。この行列式は、非負整数の値を持つ。次の補題が以下の議論に有用である。

補題 1 [2]. $P_1, \dots, P_k \quad (1 \leq k \leq n+1)$ を \mathbf{N}^+ の整数ベクトルとし、 A を任意のユニモジュラー行列とする。このとき $\det(P_1, \dots, P_k) = \det(AP_1, \dots, AP_k)$ が成立する。

次の補題は、単因子論における有限生成 Abel 群の構造定理から導かれる重要な結果である。

補題 2 [2]. $P_1, \dots, P_k \quad (1 \leq k \leq n+1)$ を $\det(P_1, \dots, P_k) = 1$ となる整数ベクトルとする。このとき $\det(P_1, \dots, P_{n+1}) = 1$ となるような整数ベクトル P_{k+1}, \dots, P_{n+1} が存在する。

以下最初に 2 つの整数ベクトル間の分割を考察する。この場合には、代数的な方法だけでその錐体の部分分割を得ることができる。次の補題 3 は、文献 1 の結果から従う。

補題 3 P と Q を $c = \det(P, Q) \quad (c > 1)$ となる \mathbf{N}^+ の原始的整数ベクトルとする。このとき、ある整数 $c_1 > 0$ に対して、 $\det(P, P_1) = 1$ 、 $\det(P_1, Q) < c$ かつ $P_1 = \frac{1}{c}(Q + c_1 P)$ となる整数ベクトル P_1 が存在する。

定義 4 P と Q を \mathbf{N}^+ の整数ベクトルとする。原始的整数ベクトル P_1, \dots, P_λ の列が次の条件を満たすとき、 P と Q から構成される錐体 (P, Q) の標準的原始列という。

もし、 $c = \det(P, Q) > 1$ ならば非負整数 $c_i \quad (i = 0, \dots, \lambda+1)$ が存在して

$$c = c_0 > c_1 > \dots > c_\lambda = 1 > c_{\lambda+1} = 0$$

及び

$$P_i = \frac{1}{c_{i-1}}(Q + c_i P_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, \lambda)$$

を満たす。ここで、 $c_i = \det(P_i, Q)$ 、 $P_0 = P$ 、 $P_{\lambda+1} = Q$ である。

このとき、次の強力な補題が成立する。

補題 5 [2]. P 及び Q を $c = \det(P, Q) > 1$ となる原始的整数ベクトルとし、 P_1, \dots, P_λ を錐体

(P, Q) の標準的原始列とする。また、定義から c_i を $P_i = \frac{1}{c_{i-1}}(Q + c_i P_{i-1})$ ($i = 1, \dots, \lambda$) である非負整数の減少列とする。このとき、 $m_i = (c_{i-1} + c_{i+1})/c_i$ ($i = 1, \dots, \lambda$) とおくと

$$\frac{c}{c_1} = m_1 - \frac{1}{m_2 - \frac{1}{\ddots \frac{1}{m_\lambda}}}$$

が成立する。但し、各 m_i は、 $m_i \geq 2$ の整数となる。

(証明) λ に関する帰納法で証明する。はじめに $\lambda = 1$ とすると、

$P_1 = (Q + c_1 P_0)/c_0 = (Q + P)/c$ なので $m_1 = (c_0 + c_2)/c_1 = (c + 0)/1 = c > 1$ が成立する。

次に $k > 1$ と仮定する。 $P_1 = (Q + c_1 P_0)/c_0 = (Q + c_1 P)/c$ 及び、 $P_2 = (Q + c_2 P_1)/c_1$ から

$$P_2 = \frac{1}{c_1} \left\{ \left(1 + \frac{c_2}{c}\right) Q + \frac{c_1 c_2}{c} P \right\}$$

となる。故に、

$$\det(P, P_2) = \frac{1}{c_1} \left(1 + \frac{c_2}{c}\right) \det(P, Q) = \frac{c + c_2}{c_1} = m_1$$

従って、 m_1 は整数でかつ $m_1 \geq 2$ である。帰納法の仮定から m_i ($i = 2, \dots, \lambda$) は 2 以上の整数であるから、

$$m_1 - \frac{1}{m_2 - \frac{1}{\ddots \frac{1}{m_\lambda}}} = \frac{c + c_2}{c} - \frac{1}{\frac{c_1}{c_2}} = \frac{c}{c_1}$$

が成立する。

(証明終わり)

以下、補題 5 に現れる連分数展開を $\frac{c}{c_1} = [m_1, \dots, m_\lambda]$ と略記する。

3. 標準的部分分割

本節では、ユークリッド空間の中での線分の部分分割を議論する。補題 3 による部分分割の方法は、 \mathbf{N}^+ の錐体の部分分割なので、ユークリッド空間内の実際的な 3 角形分割を直接構成できない。このため、以下で錐体部分分割の方法を拡張して、線分の直接的な部分分割の方法を与える。また、次節では、この線分の部分分割を利用して標準的 3 角形分割を明示的に構成する方法を与える。

命題 6 P, Q を原始的整数ベクトルとし、 $c = \det(P, Q) > 1$ と仮定する。このとき、線分

\overline{PQ} 上に、有理数ベクトル $\overline{T_i}$ を得る。ただし、 $\overline{T_i} = D_i T_i$ で、 D_i は有理数、 T_i は、 \mathbf{N}^+ の標準的原始列の整数ベクトルで、次の条件を満たす：

$$T_{i+1} = \frac{1}{c_i}(Q + c_{i+1}T_i) \quad (i = 0, \dots, \lambda)$$

$$T_0 = P$$

ここで、 $c = c_0 > c_1 > \dots > c_\lambda = 1 > c_{\lambda+1} = 0$ である。

(証明)

補題 3 と補題 5 により、 (P, Q) に対する標準的原始列の整数ベクトル T_i で、

$$T_{i+1} = \frac{1}{c_i}(Q + c_{i+1}T_i) \quad (i = 0, \dots, \lambda)$$

を得る。ただし、 $T_0 = P$, $T_{\lambda+1} = Q$, $c = \det(P, Q)$, $c = c_0 > c_1 > \dots > c_\lambda = 1 > c_{\lambda+1} = 0$ である。ここで、次の補題 7 を用いる、この補題 7 は、最初の整数ベクトル P, Q のみで分割点 T_i が記述できることを示す。

補題 7 上述の c_i を用いて、整数 B_i, S_i, K_i ($i = 1, \dots, \lambda$) を次のように定義する：

$$B_i = \prod_{j=0}^{i-1} c_j, \quad S_i = \prod_{j=1}^i c_j$$

$$K_i = B_{i-1} + c_i K_{i-1} \quad (i \geq 2)$$

$$K_1 = 1.$$

このとき、

$$T_i = \frac{1}{B_i}(K_i Q + S_i P)$$

が成立する。

(補題 7 の証明)

i に対する帰納法で証明する。 $i = 1$ のとき、 $T_1 = (K_1 Q + S_1 P) / B_1 = (Q + c_1 P) / c_0$

で、これは補題 3 で示されている。今、 $i > 1$ と仮定する。命題 6 の仮定から

$T_{i+1} = (Q + c_{i+1} T_i) / c_i$ なので、

$$T_{i+1} = \frac{1}{c_i}(Q + c_{i+1} \times \frac{1}{B_i}(K_i Q + S_i P)) = \frac{1}{B_{i+1}}(K_{i+1} Q + S_{i+1} P)$$

となる。

(補題 7 の証明終わり)

この補題の構成法から T_i は整数ベクトルである。この整数ベクトルは、原点 o を頂点とした点 P, Q の錐

体の中の分割点である。次に線分 \overline{PQ} 上に $\overline{T_i}$ をとり、 $o\overline{T_i}$ と線分 oT_i を延長する。補題 7 から

$T_i = (K_i Q + S_i P) / B_i$ なので、

$$\overline{T_i} = \frac{B_i}{K_i + S_i} T_i$$

となる。故に $\overline{T_i}$ は、線分 \overline{PQ} 上の有理点である。ここで、 $D_i = \frac{B_i}{K_i + S_i}$ と書くことにより証明された。

(命題 6 の証明終わり)

このアルゴリズムは、直線の方程式を直接解かないで部分分割点を求めることを可能にする。すなわち、部分分割ベクトル T_i ($i = 1, \dots, \lambda$) は、最初与えた 2 つの原始的整数ベクトル P, Q だけで表現できる。次

の図は、この過程を 2 つの部分分割点に対して例示したものである。 $\overline{T_1}, \overline{T_2}$ が求めるベクトルである。

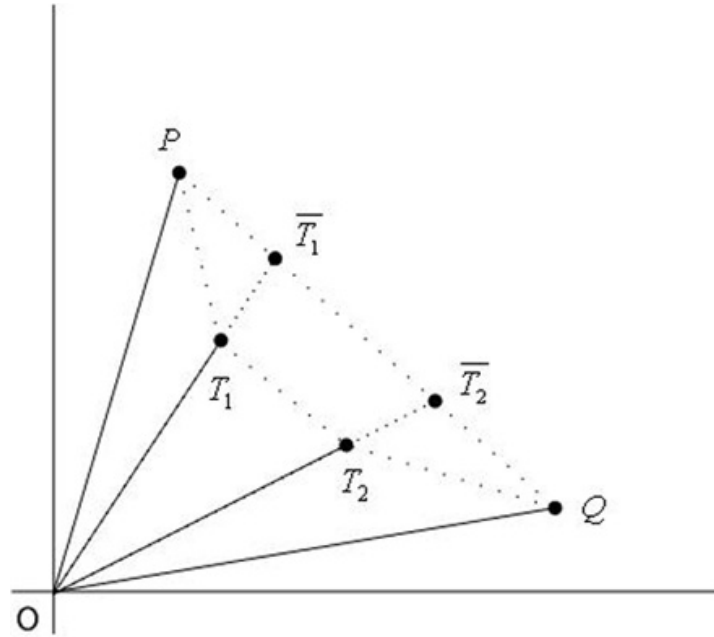


図 1 分割ベクトル

また、有理数 D_i は整数計算により求めることが可能なのでコンピュータによる "exact" 計が可能になることは重要である。

例 8 $P = {}^t(2, 3)$ 及び $Q = {}^t(1, 4)$ とする。このとき $\det(P, Q) = 5$ で、整数ベクトル

$T_1 = (Q + 2P) / 5 = {}^t(1, 2)$ を得る。因子 D_1 は、 $B_1 = c_0 = c_1 = 5$, $S_1 = c_1 = 2$, $K_1 = 1$ から

$D_1 = B_1 / (K_1 + S_1) = 5 / (1 + 2) = 5/3$ となるので、 $\overline{T}_1 = D_1 T_1 = {}^t(5/3, 10/3)$ を得る。

例9 $P_1 = {}^t(n, n-1, n)$ 、 $P_2 = {}^t(m-1, m, m-1)$ で m, n は 2 以上の正の整数とする。

このとき $\det(P_1, P_2) = n + m - 1$ で、錐体分割点の整数ベクトル

$$T_1 = \frac{1}{c}(P_1 + c_1 P_2) = {}^t(1, 1, 1)$$

を得る。ここで、 $c = c_0 = n + m = 1$, $c_1 = 1$ である。因子 D_1 は、

$$D_1 = \frac{B_1}{K_1 + S_1} = \frac{m + n - 1}{2}$$

となるので、

$$\overline{T}_1 = D_1 T_1 = {}^t\left(\frac{m+n-1}{2}, \frac{m+n-1}{2}, \frac{m+n-1}{2}\right)$$

が得られる。

はじめのベクトルが原始的整数ベクトルでない場合には、原始的な場合に議論を還元することにより容易に標準的部分分割を得ることができる。

系10 P', Q' を非原始的整数ベクトルで、かつ $\det(P', Q') > 1$ とする。 d, f を

$P' = dP$ 、 $Q' = fQ$ となる自然数とする。ここで、 P, Q は、原始的整数ベクトルである。すなわち、 d, f

は、それぞれのベクトル要素の $G.C.D.$ である。このとき、線分 $\overline{P'Q'}$ 上に標準的部分分割ベクトル $\overline{T'}$ が得られる。

(証明)

命題6から原始的整数ベクトル P, Q 上に有理標準部分分割点 \overline{T} を構成できる。命題6と同じ記号を用いて、その \overline{T} は、

$$\overline{T} = DT = \frac{1}{K+S}(KQ + SP)$$

と書ける。簡単のため、 $\alpha = S/(K+S)$ 、 $\beta = K/(K+S)$ と置くと、 $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ である。故に、

$\overline{T} = \alpha P + \beta Q$ ($\alpha + \beta = 1$) となる。これより初等的な計算により非原始的整数ベクトル P', Q' の線分

$\overline{P'Q'}$ 上に部分分割点 $\overline{T'}$ が得られる。この点は、 $\overline{P'Q'}$ と $o\overline{T}$ の延長線との交点であるので、簡単な計算から有理数ベクトル

$$\overline{T'} = \frac{1}{\left(\frac{S}{d} + \frac{K}{f}\right)}(KQ + SP)$$

を得る。

(証明終わり)

例 11 $P' = {}^t(2, 8)$ および $Q' = {}^t(2, 3)$ として、線分 $\overline{P'Q'}$ の部分分割点 $\overline{T'}$ を求める。 $P = {}^t(1, 4)$ とおくと、 $P' = 2P$ また $Q' = Q$ とできる。このとき、 $d = 2, f = 1$ かつ $\det(P, Q) = 5$ となる。連分数展開により P, Q に対して 2 つの部分分割点を得られ、 $c_0 = c = 5, c_1 = 2, c_2 = 1$ となる。故に、 $B_1 = 5, S_1 = 2, K_1 = 1$ 及び $B_2 = 10, S_2 = 2, K_2 = 6$ となる。最終的に、

$$\begin{aligned}\overline{T_1} &= \frac{1}{\left(\frac{S_1}{d} + \frac{K_1}{f}\right)}(K_1P + S_1Q) = {}^t(2, 4) \\ \overline{T_2} &= \frac{1}{\left(\frac{S_2}{d} + \frac{K_2}{f}\right)}(K_2P + S_2Q) = {}^t(2, 6)\end{aligned}$$

が得られる。

補題 7 と系 10 から、2 つの有理数ベクトル間の線分に対する部分分割も容易に求めることができる。それは有理数ベクトルのすべての成分の分母の L.C.M. を各成分に乗算することにより有理数ベクトルを整数ベクトルに変換して議論できることによる。これは、有理数ベクトルの整数格子の座標上への再定義に対応する。

4. 標準的三角形分割

この節で、3 つ以上の基本的な整数ベクトルに対する部分分割、すなわち 3 角形分割を議論する。次の基本的な補題が知られている。

補題 12[1]. $P_i (i = 1, \dots, k+1)$ を原始的整数ベクトルとする。 $\det(P_1, \dots, P_k) = 1$ 及び $c = \det(P_1, \dots, P_{k+1}) > 1$ とする。このとき、

$$R = \frac{1}{c} \left(\sum_{i=1}^k c_i P_i + P_{k+1} \right)$$

となる整数ベクトル R が存在する。ここで c_1, \dots, c_k は非負整数である。

$k = 2$ の場合は、より精密な結果を得ることが出来るので、ここでは、 $k = 2$ の時の 3 角形分割を構成する。

命題 13 P, Q 及び R を $\det(P, Q) = 1, \det(P, R) = 1$ かつ $c = \det(P, Q, R) > 1$ となる原始的整数ベクトルとする。このとき原点に対する錐体 (P, Q, R) の内部に次を満たす整数ベクトル T_i ($i = 0, \dots, \lambda$) が存在する：

$$T_i = \frac{1}{B_i} (K_i R + S_i Q + L_i P) \quad (T_0 = Q).$$

ただし、

$$\begin{aligned} B_i &= \prod_{j=0}^{i-1} c_j, \quad S_i = \prod_{j=1}^i c_j \\ K_i &= B_{i-1} + c_i K_{i-1} \quad (K_1 = 1), \\ L_i &= B_{i-1} d_i + c_i L_{i-1} \quad (L_1 = d_1) \end{aligned}$$

及び $c = c_0 > c_1 > \dots > c_k = 1$, $0 \leq d_i < c_{i-1}$, $c_i, d_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, \dots, \lambda$) である。

(証明)

補題 12 により、整数ベクトル

$$T_i = \frac{1}{c_{i-1}} (R + c_i T_{i-1} + d_i P)$$

が存在する。 i についての帰納法により補題を証明する。 $i = 1$ に対しては、 T_i の定義から

$$T_1 = \frac{1}{c_0} (K_1 R + c_1 Q + S_1 P) = \frac{1}{c} (R + c_1 Q + d_1 P)$$

である。 $i > 1$ に対して

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= \frac{1}{c_i} (R + c_{i+1} T_i + d_{i+1} P) \\ &= \frac{1}{c_i} \left(R + \frac{c_{i+1}}{\prod_{j=0}^{i-1} c_j} (K_i R + \prod_{j=1}^i c_j Q + L_i P) + d_{i+1} P \right) \\ &= \frac{1}{B_{i+1}} (K_{i+1} R + S_{i+1} Q + L_{i+1} P) \end{aligned}$$

よって、命題 13 は証明された。

命題 13 と同じ条件下で、前節の $k = 1$ の場合と同様の容易なコンピュータ計算を可能にするアルゴリズムが得られる。

補題 14 命題 13 における整数列 $c = c_0 > c_1 > \dots > c_\lambda = 1$ と $0 \leq d_i < c_{i-1}$ ($i = 1, \dots, \lambda$) に対して、 $m_i = (c_{i+1} + c_{i-1}) / c_i$ とおく。このとき各 m_i は正の整数で、かつ c / c_1 連分数展開

$$\frac{c}{c_1} = [m_1, \dots, m_\lambda]$$

が得られる。

(証明)

補題 1 2 によって、整数ベクトル

$$T_i = \frac{1}{c_{i+1}}(R + c_i T_{i+1} + d_i P)$$

が存在する。故に

$$T_{i+1} + T_i = \frac{c_{i+1} + c_{i-1}}{c_i} T_i + \frac{d_{i+1} + d_i}{c_i} P.$$

従って

$$\det(T_{i+1} + T_i, P) = \frac{c_{i+1} + c_{i-1}}{c_i} \det(T_i, P) = m_i$$

故に、 m_i は正の整数でかつ $m_1 \geq 2$ である。 c / c_1 連分数展開の等式

$$c_{i+1} + c_{i-1} = m_i c_i, \quad c = c_0$$

から直ちに結論が得られる。

(証明終わり)

定理 15 P, Q 及び R を $\det(P, Q) = 1, \det(P, R) = 1$ かつ $c = \det(P, Q, R) > 1$ となる

原始的整数ベクトルとする。このとき、 $\langle P, Q, R \rangle$ -平面内に標準的 3 角形分割の有理数ベクトル $\overline{T_i}$

($i = 0, \dots, \lambda$) が得られる。

(証明)

命題 13 によって、原点に対する錐体 (P, Q, R) の内部に分割点

$$T_i = \frac{1}{B_i}(K_i R + S_i Q + L_i P)$$

をとれる。この点を $\langle P, Q, R \rangle$ -平面上に射影する。故に

$$\begin{aligned} \overline{T_i} &= \frac{B_i}{K_i + S_i + L_i} T_i \\ &= \frac{1}{K_i + S_i + L_i} (K_i R + S_i Q + L_i P) \end{aligned}$$

(証明終わり)

備考 16 分割点を求める過程を端的にまとめる。命題 6 と同じ記号を用いて、はじめに c_1 と c_2 を計算す

る。次に、連分数展開によりすべての c_i を得る。各 c_i ($i \geq 2$) に対して、 T_i の整数条件の方程式 $R + c_i T_{i-1} + d_i P \equiv 0 \pmod{c_i}$ を解き d_i を求める。最終的に B_i, K_i, L_i 及び

S_i を計算して $\overline{T_i}$ が求められる。

次に、より複雑な例を示す。これは 3 三角形分割を 2 重に行った例である。

例 17 $P_1 = {}^t(3, 1, 1)$ 、 $R_1 = {}^t(2, 2, 1)$ 、 $R_2 = {}^t(2, 1, 3)$ とする。このとき $\det(P_1, R_1) = 1$ 、 $\det(P_1, R_2) = 1$ 、 $\det(R_1, R_2) = 1$ で、 $\det(P_1, R_1, R_2) = 9$ である。定理 15 と命題 13 によって整数ベクトル T_1 で、

$$T_1 = \frac{1}{c}(R_2 + c_1 R_1 + d_1 P_1)$$

となるものが存在する。ここで、 $c = c_0 = 9$ 、 $c_2 = 2$ 、 $d_1 = 4$ である。連分数展開によって $c/c_1 = 9/2 = 5 - 1/2 = [5, 2]$ なので、 $m_1 = 5$ 及び $m_2 = 2$ となる。従って 2 つの錐体整数分割点が存在することがわかる。各 c_i ($i \geq 2$) は、方程式 $c_{i+1} = m_i c_i - c_{i-1}$ から求められ、

$c_2 = m_1 c_1 - c_0 = 1$ 、 $c_3 = m_2 c_2 - c_1 = 0$ となる。同様に T_1 と T_2 の整数条件によって $d_1 = 4$ 、 $d_2 = 0$ となる。これらより、 $B_1 = 9$ 、 $K_1 = 1$ 、 $S_1 = 2$ 、 $L_1 = 4$ 及び $B_2 = 18$ 、 $K_2 = 10$ 、 $S_2 = 2$ 、 $L_2 = 4$ が計算される。故に、定理 15 の式 $T_i = (K_i R + S_i Q + L_i P) / B_i$ ($i = 1, 2$) によって整数ベクトル T_i ($i = 1, 2$) は、次のように求まる。

$$T_1 = \frac{1}{9}(R_2 + 2R_1 + 4P_1) = {}^t(2, 1, 1)$$

$$T_2 = \frac{1}{9}(5R_2 + R_1 + 2P_1) = {}^t(2, 1, 2)$$

ここで、 $\det(R_1, T_1, T_2) = \det(R_1, T_1, R_2) = 2$ 及び $\det(P_1, R_1, T_1) = 1$ 、 $\det(P_1, T_1, T_2) = 1$ 、 $\det(P_1, T_2, R_2) = 1$ となる。従って (R_1, T_1, T_2) -錐と (R_1, T_1, R_2) -錐は更に 3 三角形分割することが可能である。再度定理を適用して、 (R_1, T_1, T_2) -錐に対しては、部分分割点 T_3 が得られる：

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}(R_1 + T_1 + T_2) \\ &= \frac{1}{3}(R_2 + 2R_1 + P_1) = {}^t(3, 2, 2). \end{aligned}$$

同様に (R_1, T_1, R_2) -錐に対しては、部分分割点 T_4 が得られる：

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{2}(R_1 + T_2 + R_2) \\ &= \frac{1}{9}(7R_2 + 5R_1 + P_1) = {}^t(3, 2, 3). \end{aligned}$$

最終的に、 $\overline{T}_1 = {}^t(18/7, 9/7, 9/7)$ 、 $\overline{T}_2 = {}^t(9/4, 9/8, 9/4)$ 、 $\overline{T}_3 = {}^t(9/4, 3/2, 3/2)$ 及び

$\overline{T}_4 = {}^t(27/13, 18/13, 27/13)$ が得られる。3 角形分割の図は、次のようになる。

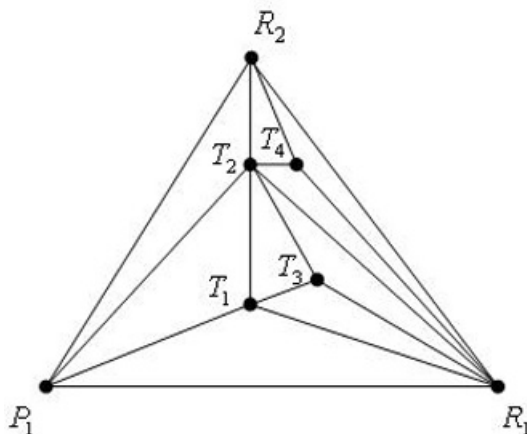


図2 3角形分割図

以上の部分分割の構成は $k \geq 2$ に対して一意的でない。この非一意性は、3 角形分割の順序を一意的に決められないことに起因する。一方上述の 3 角形分割は、コンピュータで数値的に正確に計算できる。これは、 \mathbf{Q} 上のアルゴリズムを \mathbf{Z} 上に還元できるからである。

参考文献

1. M.Oka, (1997), Non-Degenerate Complete Intersection Singularity, HERMANN
2. M.Oka, (1986), On the Resolution of Hypersurface Singularities, Advanced Studies In Pure Mathematics **8**, pp.405-436
3. N. Hashimoto, (1995), Asymptotic expansion of an oscillating integral on a hypersurface, J.Math.Soc. Japan, Vol.**47**, No.3, pp.441-473
4. A.Tajima and H.Imai, (1999), Optimality and Integer Programming Formulations of Triangulations, Journal of Information Processing **40**, pp.2861-2871

5. D.Huber and B.Sturmfelds, (1995), A polyhedral method for solving space polynomial systems, Math.Comp. **64**, pp.1541-1555
6. M.C.Lee and M.S.Joun, (1998), General approach to automatic generation of quadriternals on three-dimentional surface, Communications in Numerical Methods in Engineering **14**, pp.609-620
7. P.Cignoni, C.Motani, E.Puppo and R.Scopigno, (1997), Multiresolution Representation and Visualization of Volume Data, IEEE Trans, Visualization and Computer Graphics **3**, pp.352-359
8. Jean-Pierre Serre, (1956), Geometric algebrique et geometrie analytique, Annales de l'institute Fourier **6**, pp.1-42

Abstract

This paper discusses a computer algorithm of a canonical subdivision for the line segment and plane in Euclidean space. The subdivisions are obtained by extending the Oka method in the field of the torus embedding on the integral lattice, and simultaneously the subdivision points are expressed by the rational vectors.