〔東京家政大学研究紀要　第50集（2），pp. 67～73〕

# 超曲面上の振動積分の漸近展開におけるlog項

橋本　直樹*

（平成21年9月30日受理）

# A Log Term of the Asymptotic Expansions of an Oscillating Integral on a Hypersurface

HASHIMOTO, Naoki

(Received on September 30, 2009)

キーワード：振動積分、漸近展開
Key words：oscillating integral, asymptotic expansion

## 1. はじめに

振動積分は、物理・数学等の多様な場所に登場する。そして、その挙動を得るために漸近展開が調べられている。文献［1］において、超局面上の振動積分の漸近展開を具体的に行うことが可能な範疇とその方法をトーラス埋め込みの方法を用いて示した。その積分は

$$I(\tau,\varphi)=\int_{R^n} e^{i\tau f(x)}\delta(g(x))\varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

である。$f, g$ は、n次元ユークリッド空間の原点の近傍で定義された関数芽とする。ここで、$f(x)$ は振動積分の位相関数、$\delta(g(x))$ は束縛方程式 $g(x)=0$ を表すdelta関数である。そして $\tau$ は実数パラメータ、$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ である。また、文献［2］においては、その漸近展開が可能となる条件を満たす関数にA、D、E型の孤立特異点を持つものが含まれることを示した。文献［1, 2］における例は、いずれも展開パラメータ $\tau$ のベキ指数を求める例で構成され、$\log\tau$ 項については、その項の出現可能性を指摘しているのみである。従って文献［1］の定理14に示されている $\log\tau$ 項が我々の漸近展開の可能条件の下で存在するのかは不明であった。本稿では、$\log\tau$ 項が存在する例を構成することにより、文献［1］の定理14の $\log\tau$ 項の存在定理を与える。 $\log\tau$ 項の指数計算は、Newton 図形だけからは得られず具体的なトーラス埋め込みの計算を必要とする。このため、コンピュータプログラムを作成して数値実験を行い、更にそれを手計算で確認した。プログラミング言語は、Basic言語を用いた。対象とするものの計算量が比較的に少なくグラフィックス、プリントが容易にできるからで、この点は、他のプログラミング言語より勝っている。

以下、2節で振動積分の漸近展開の計算法、3節で $\log\tau$ 項を含む例の構成を示す。

## 2. 振動積分の漸近展開の計算法

本稿で扱う計算の基本事項を述べる［1, 4, 5］。振動積分（1）の漸近展開を得るためにOkaによるトーラス埋め込みの方法を用いる［2, 3, 4］。はじめに必要な記号を説明する。

$h(z)=\sum a_\nu z^\nu$ を $\mathbf{C}^n$ における解析関数とする。このとき、$\Gamma_+(h)$ によりNewton多面体、$\Gamma(h)$ でNewton図形を表す。$\Gamma_+(h)$ は、$a_\nu\neq 0$ となる $\nu$ の $\{\nu+\mathbf{R}^n\}$ の合併集合の凸包で、$\Gamma(h)$ は、$\Gamma_+(h)$ のコンパクトな面の合併集合である。$\mathbf{R}^n$ の双対空間を、ユークリッド内積により $\mathbf{R}^n$ と同一視し、この下で $N^+$ を正の双対整数ベクトルの集合とし、その要素 $P={}^t(p_1,\ldots,p_n)$ を双対重み付きベクトル（dual weight vector）という。

また $P(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i (x_i\in\mathbf{R}^n)$ として次を定義する。

*英語コミュニケーション学科　コミュニケーション学研究室

$$d(P;\ h)=\min\{P(x);x\in\Gamma_+(h)\} \tag{2}$$
$$\Delta(P;\ h)=\{x\in\Gamma_+(h);P(x)=d(P;\ h)\} \tag{3}$$

$h=f\cdot g$として、$N^+$の空間に同値関係“∼”を入れる。同値関係$P\sim Q$は「$\Delta(P;f)=\Delta(Q;f)$及び、$\Delta(P;g)=\Delta(Q;g)$が成立するとき、かつそのときに限る」と定義する。この同値類を$\Gamma^*(h)$または、$\Gamma^*(f,g)$で表し、$N^+$の双対Newton図形という。

（1）の振動積分では、$f(x)$, $g(x)$は、実数値実解析関数であるが、この変数を複素数に拡大して複素解析関数としてそれらの関数による完全交差代数多様体のトーラス埋め込み理論を用いる。そしてこの方法で得られるトーリック多様体$X(\Gamma)$ $(\Gamma=\Gamma(f,g))$の実形を$Y(\Gamma)$とかく。次に、特異点解消写像$\pi:Y\to U\subset\mathbf{R}^n$に対し、トーラス埋め込みにより構成した$f$, $g$の双対Newton図形$\Gamma^*(f,g)$のユニモジュラー単体分割を$\Sigma^*$とする。$\Sigma^*$の要素は双対整数ベクトルで、以下単に双対ベクトルと言うことにする。

この$\Sigma^*$の要素を$\sigma$とすると、$\sigma=<P_1,P_2,\dots,P_n>$ で、$P_i={}^t(p_{1i},p_{2i},\dots,p_{ni})$ と書ける。$\sigma$を局所座標とした積分（文献［1］の（13））を考え、その際の量を定義した。

$$\alpha(P;g)=|P_i|-d(P_i,g)-1 \tag{4}$$

ここで、$|P_i|=\sum_{j=1}^{n}p_{ji}$である。

**定義1**　特異点解消写像$\pi:Y\to U\subset\mathbf{R}^n$に対して、$M_Y$を$d(P_i,f)>0$かつ$(d(P_i,f),\alpha(P_i,g))\neq(1,0)$　$(i=1,\dots,n)$となるペア$(d(P_i,f),\alpha(P_i,g))$とする。$M_Y$を写像$(Y,\pi)$の多重度の集合と言うことにする。このとき、写像$(Y,\pi)$の重み$\beta_Y$を

$$\beta_Y=\begin{cases}\max\left\{-\dfrac{\alpha(P_i,\ g)+1}{d(P_i,f)};\quad(d(P_i,f),\ \alpha(P_i,\ g))\in M_Y,\ \dim\Delta_i(g)>0\right\} & (M_Y\neq\phi\text{ のとき})\\ -\infty \qquad (M_Y=\phi\text{ のとき}) & \end{cases}$$

と定義する。更にこのとき$\bar{j}$を

$$\bar{j}=\left\{j;\ -\frac{\alpha(P_i,\ g)+1}{d(P_i,\ f)}\text{ のうち }j\text{ 個が }\beta_Y\text{ に等しい}\right\}$$

と定義する。

**定義2**　$\mathbf{R}^n$の原点の任意の近傍での$I(\tau,\varphi)$の漸近展開に対して、ある$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$が存在し、かつ展開係数が$\alpha_{p,k}(\varphi)\neq0$となる$p$の最大数を振動指数$\beta(f,g)$ということにする。

また、文献［2］で示したように、$\Gamma^*(f,g)$の任意の$P$に対し関数$g$が$\alpha(P,g)\geq0$を満たすとき$g$は、$f$に対して$\alpha$クラスであるという。

このとき、文献［1］で得られた結果は、次の定理と同等である。

**定理3［1］**

$(f(x),\ g(x))$を$\mathbf{R}^n$の原点の近傍$U$から$\mathbf{R}^2$への解析写像、$\{x\in\mathbf{R}^n;f(x)=g(x)=0\}$を$\mathbf{R}^n$で原点に孤立特異点を持つジェネリックな非退化完全交叉多様体とする。$g(x)$を解析関数で$f$に対して$\alpha$クラスと仮定し、更に$f(x)$、$g(x)$は convenient と仮定する。このとき漸近展開

$$\int_{R^n}e^{i\tau f(x)}\delta(g(x))\varphi(x)\,dx\sim\sum_p\sum_{k=0}^{n-2}a_{p,k}(\varphi)\tau^p(\log\tau)^k \tag{6}$$

が $|\tau| \to \infty$のとき成立する。ここで$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$は、$\mathbf{R}^n$の原点の十分小さい近傍で定義された試験関数である。このとき次が成立する。

1．トーラス埋め込みの方法でベキ$p$が計算できる。そのベキは、負の有理数からなる等差数列になる。
2．$\beta_Y > -1$ならば、振動指数 $\beta_Y(f, g)$ は、$\beta_Y$を超えない。更に$\varphi(0) > 0$かつ$\varphi(x) \geq 0$ならば、$\beta_Y(f, g) = \beta_Y$。
3．$\beta_Y > -1$かつ$\varphi(0) > 0$、$\varphi(x) \geq 0$のとき最高ベキ$p = \beta(f, g) = \beta_Y$に対応した$(\log\tau)$のベキ指数は、トーラス埋め込みの計算により$\bar{j}-1$になる。

### 3. $\log\tau$ 項を含む例の構成

文献［1, 2］で示した例はすべて $\log\tau$ がその漸近展開に現れるものでなかった。この節で、定理3の「3.」の条件を満たす例を構成し、我々の得た定理が意味を持つことを示す。文献［1］で示した定理の証明に従って計算過程をアルゴリズム化し、コンピュータ計算を行うことで計算例を作成した。それらの一部を形式化し、より一般的な形にして以下で命題として述べる。

はじめに、$\bar{j}$の計算アルゴリズムを示す。

① 与えられた位相関数 $f$ と束縛関数 $g$ から双対Newton図形$\Gamma^*(f, g)$のすべての要素を構成する。すなわち第一象限に、多角錘の凸閉包を構成する。
② $\Gamma^*(f, g)$のすべての要素$\sigma$に対応した$P_i$に対し、$d(P_i, f)$、$d(P_i, g)$、$\alpha(P_i, g) = |P_i| - d(P_i, g) - 1$ を求める。
③ すべての$P_i$に対して、$\tau = -\dfrac{\alpha(P_i, g)+1}{d(P_i, f)}$を計算し$\tau_{\max}$を求める。
④ $\tau_{\max}$になるすべて$\sigma \in \Gamma^*(f, g)$の、すなわち$P_i$を求め、その個数を$\bar{j}$とする。

このアルゴリズムにより、Basic言語を用いて3次元のNewton図形を可視化することができるプログラムを作成した。具体的な例を構成する場合、双対Newton図形をみることが手計算の上でもまた、一般的な特徴をつかむ上でも大変役立つ。そのプログラムにより計算実験を重ね、次の結果を得ることができた。

はじめに特異点のタイプが$T_{p,q,r}$型の特殊値による関数$f$ と、$A_k(k \geq 3)$型の特異点を持つ関数$g$の例を示す。$T_{p,q,r}$型とは、$f = x^p + y^q + z^r + xyz\ (1/p + 1/q + 1/r < 1)$の関数で定義される特異点のタイプのことである。以下、$f$、$g$はすべてジェネリックにとる。

**命題4**

位相関数$f$が原点に$T_{4,4,4}$型の孤立特異点を持つ

$$f = x^4 + y^4 + z^4 + xyz$$

と、原点に$A_k$型の孤立特異点を持つ束縛関数を

$$g = x^2 + y^2 + z^{k+1} \quad (k \geq 3)$$

とするとき、その振動積分の漸近展開の最高ベキの項に $\log\tau$ 項が存在する。

（証明）

双対Newton図形$\Gamma^*(f, g)$から得られるすべての要素は、

$$P_1 = (1,\ 2,\ 1),\quad P_2 = (1,\ 1,\ 2),\quad P_3 = (2,\ 1,\ 1),\quad P_4 = (3,\ 3,\ 2)$$

$$\begin{cases} k: \text{奇数のとき} \quad P_5 = \left(\dfrac{k+1}{2},\ \dfrac{k+1}{2},\ 1\right) \\ k: \text{偶数のとき} \quad P_5 = (k+1,\ k+1,\ 2) \end{cases}$$

となる。定義に従って計算すると、次が得られる。

$$d(P_1, f) = 4,\quad d(P_1,\ g) = 2 \qquad d(P_2, f) = 4,\ d(P_2,\ g) = 2$$

$$d(P_3, f) = 4,\quad d(P_3,\ g) = 2 \qquad d(P_4, f) = 8,\ d(P_4,\ g) = 6$$

$$\begin{cases} k: \text{奇数のとき} & d(P_5, f) = 4,\ d(P_5,\ g) = k+1 \\ k: \text{偶数のとき} & d(P_5, f) = 8,\ d(P_5,\ g) = 2(k+1) \end{cases}$$

同様に

$$|P_1| = 4,\quad |P_2| = 4,\quad |P_3| = 4,\quad |P_4| = 8$$

$$\begin{cases} k: \text{奇数のとき} & |P_5| = k+2 \\ k: \text{偶数のとき} & |P_5| = 2(k+2) \end{cases}$$

これらにより、$\alpha(P_i,\ g) = |P_i| - d(P_i,\ g) - 1$を計算すると

$$\alpha(P_1,\ g) = 1,\quad \alpha(P_2,\ g) = 1,\quad \alpha(P_3,\ g) = 1,\quad \alpha(P_4,\ g) = 1$$

$$\begin{cases} k: \text{奇数のとき} & \alpha(P_5,\ g) = 0 \\ k: \text{偶数のとき} & \alpha(P_5,\ g) = 1 \end{cases}$$

となる。従って

$$\tau_i = -\frac{\alpha(P_i,\ g)+1}{d(P_i, f)}$$

からベキ指数を求めると、

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\tau_4 = \tau_5 = -\frac{1}{4}$$

が得られるので、$\beta_{\max} = -\dfrac{1}{4}$、$\bar{j} = 2$となる。故に $\log\tau$ のベキ指数は、$\bar{j} - 1 = 1$なので、$(\log\tau)$項が存在する。

（証明終わり）

上の命題で、$k = 2$の場合は、$P_4 = P_5$となるので、$\bar{j} = 1$となり、$\log\tau$ は存在しない。また、$k = 1$の場合には、$P_4$、$P_5$がいずれも、(1, 1, 1)となり$\bar{j} = 1$である。故に、位相関数を$T_{4,4,4}$に固定したとき、束縛関数が$A_k(k \geq 3)$型の場合に、$\log\tau$ が存在する。

次に、位相関数は上と同じに固定して、束縛関数$g$が$D_k$型の場合についての例を示す。

**命題5**

位相関数$f$が原点に$T_{4,4,4}$型の孤立特異点を持つ

$$f = x^4 + y^4 + z^4 + xyz$$

で、原点に$D_k(k \geq 5)$型の孤立特異点を持つ束縛関数

$$g = x^2 + y^{k-1} + yz^2 \quad (k \geq 5)$$

の場合、その振動積分の漸近展開の最高ベキの項に $\log\tau$ 項が存在する。

（証明）

双対Newton図形$\Gamma^*(f, g)$から得られるすべての要素は、

$$P_1=(1,\ 1,\ 2),\quad P_2=(1,\ 2,\ 1),\quad P_3=(7,\ 4,\ 5),\quad P_4=(k-1,\ 2,\ k-2)$$
$$P_5=(2,\ 1,\ 1),\quad P_6=(5,\ 4,\ 3)$$

となる。定義より

$$d(P_1, f)=4,\quad d(P_1,\ g)=2$$
$$d(P_2, f)=4,\quad d(P_2,\ g)=2$$
$$d(P_3, f)=16,\quad d(P_3,\ g)=14$$
$$d(P_4, f)=8,\quad d(P_4,\ g)=2(k-1)$$
$$d(P_5, f)=4,\quad d(P_5,\ g)=3$$
$$d(P_6, f)=12,\quad d(P_6,\ g)=10$$

が得られる。同様に、

$$|P_1|=4,\quad |P_2|=4,\quad |P_3|=16$$
$$|P_4|=2k-1,\quad |P_5|=4,\quad |P_6|=12$$

が求まる。従って、

$$\alpha(P_1,\ g)=1,\quad \alpha(P_2,\ g)=1,\quad \alpha(P_3,\ g)=1$$
$$\alpha(P_4,\ g)=0,\quad \alpha(P_5,\ g)=0,\quad \alpha(P_6,\ g)=1$$

これより、$\tau_i=-(\alpha(P_i,\ g)+1)/d(P_i, f)$を計算すると、

$$\tau_1=-\frac{1}{2},\quad \tau_2=-\frac{1}{2},\quad \tau_3=-\frac{1}{8}$$
$$\tau_4=-\frac{1}{8},\quad \tau_5=-\frac{1}{4},\quad \tau_6=-\frac{1}{6}$$

となる。この中では、$-1/8$ が最大なので、$\beta_Y=-\dfrac{1}{8}$、 また $\tau_3=\tau_4=-\dfrac{1}{8}$なので、$\bar{j}=2$となる。故に $\log\tau$ 項は存在する。

（証明終わり）

ここで、束縛関数$g$が$D_4$型の場合は、双対Newton図形が上の命題のものとは変化してしまい、漸近展開の最高ベキに対応する$\tau_i$は唯一出現するので、$\bar{j}=1$となり、$\log\tau$ 項は、現れない。

特異点分類の対称性により束縛関数$g$が$E_6$、$E_7$、$E_8$型の孤立特異点の場合についても計算し、次の結果が得られる。

**命題6**

位相関数$f$が原点に$T_{4,4,4}$型の孤立特異点を持つ

$$f=x^4+y^4+z^4+xyz$$

で、束縛関数$g$

$$E_6:\quad g=x^2+y^3+z^4$$
$$E_7:\quad g=x^2+y^3+yz^3$$
$$E_8:\quad g=x^2+y^3+z^5$$

のタイプのいずれかとする。このとき、振動積分の漸近展開の最高ベキの項に $\log\tau$ 項が現れない。

（証明）

（ｉ）$g$が$E_6$型の場合

双対Newton図形の要素には、次の$P_1 \sim P_6$が得られる。

$$P_1=(1,\ 1,\ 2),\quad P_2=(1,\ 2,\ 1),\quad P_3=(3,\ 2,\ 3),$$

$$P_4=(2,\ 1,\ 1),\quad P_5=(6,\ 4,\ 3),\quad P_6=(9,\ 6,\ 5)$$

また、各$P_i(i=1,\dots,6)$に対する$\tau_i$は、

$$\tau_1=-\frac{1}{2},\quad \tau_2=-\frac{1}{2},\quad \tau_3=-\frac{1}{4}$$

$$\tau_4=-\frac{1}{4},\quad \tau_5=-\frac{1}{12},\quad \tau_6=-\frac{1}{10}$$

となるので、$\bar{j}=1$。

（ii）$g$が$E_7$型の場合

双対Newton図形の要素には、次の$P_1 \sim P_6$が得られる。

$$P_1=(1,\ 1,\ 2),\quad P_2=(1,\ 2,\ 1),\quad P_3=(3,\ 2,\ 3),$$

$$P_4=(2,\ 1,\ 1),\quad P_5=(9,\ 6,\ 4),\quad P_6=(9,\ 6,\ 5)$$

また、各$P_i(i=1,\dots,6)$に対する$\tau_i$は、

$$\tau_1=-\frac{1}{2},\quad \tau_2=-\frac{1}{2},\quad \tau_3=-\frac{1}{4}$$

$$\tau_4=-\frac{1}{4},\quad \tau_5=-\frac{1}{16},\quad \tau_6=-\frac{1}{10}$$

となるので、$\bar{j}=1$。

（iii）$g$が$E_8$型の場合

双対Newton図形の要素には、次の$P_1 \sim P_6$が得られる。

$$P_1=(1,\ 1,\ 2),\quad P_2=(1,\ 2,\ 1),\quad P_3=(3,\ 2,\ 3),$$

$$P_4=(2,\ 1,\ 1),\quad P_5=(15,\ 10,\ 6),\quad P_6=(9,\ 6,\ 5)$$

また、各$P_i(i=1,\dots,6)$に対する$\tau_i$は、

$$\tau_1=-\frac{1}{2},\quad \tau_2=-\frac{1}{2},\quad \tau_3=-\frac{1}{4}$$

$$\tau_4=-\frac{1}{4},\quad \tau_5=-\frac{1}{24},\quad \tau_6=-\frac{1}{10}$$

となるので、$\bar{j}=1$。

故に、$g$が原点に$E_6$型、$E_7$型、$E_8$型の孤立特異点を持つ場合には、その漸近展開の最高ベキに $\log\tau$ 項は現れない。

（証明終わり）

本稿では位相関数$f$が原点に$T_{p,q,r}$型の孤立特異点を持つタイプの特殊値の場合である$T_{4,4,4}$型を用いて例を構成した。その結果、束縛関数$g$が$A_k(k\geq 3)$と$D_{k'}(k'\geq 5)$の場合のすべてについて $\log\tau$ 項が現れることを示した。本論文の目的は、漸近展開の具体例の構成により、定理の $\log\tau$ 項存在の主張が空でないことを示すことなので、関数$f$の$T_{4,4,4}$をより一般的に扱うことはせずに特殊値を与えた例を示した。

## 参考文献

1）N. Hashimoto,（1995）, Asymptotic expansion of an oscillating integral on a hypersurface, J.Math.Soc. Japan, Vol.47, No.3, pp.441-473
2）橋本直樹,（2007）, 超曲面上の振動積分の漸近展開可能条件と計算アルゴリズム, 東京家政大学研究紀要
3）M. Oka,（1986）, On the Resolution of the Hypersurface Singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics, 8, pp.405-436
4）M. Oka,（1997）, Non-Degenerate Complete Intersection Singularity, HERMANN
5）金子晃,（1981）,「ニュートン図形・特異点・振動積分」, 上智大学数学教室

**Abstract**

This paper shows the exsistence theorem of the log term in the asymptotic expansion of an oscillating integral which is defined on a generic hypersurface. The examples of the asymptotic expansion having the log term are constructed with a Tpqr-type phase function and the A,D-type constraint functions.