〔東京家政大学研究紀要　第44集 (1), 2004, pp. 29～39〕

発見的認識のベーシック・メソッドⅡ

関根　靖光

（平成15年10月2日受理）

On the Basic Heuristic Method Ⅱ

SEKINE, Yasumitsu

(Received on October 2, 2003)

キーワード：発見的方法，数学的証明，創造的教育
Key words : heuristic method, mathematical proof, creative education

序

科学史上燦然と輝く発見的洞察の瞬間，アルキメデスは「ヘウレーカ！（発見した）」と叫んだとのことである．この逸話にちなんで我々は発見的認識体験を「ヘウレーカ」体験と名付けた．ぜひ自らも発見的認識を遂行したいとの思いで，前稿[1)]ではアルキメデスの公衆浴場での王冠問題解決の心的構造をイメージ分析した．その結果，次のような発見的認識のダイナミズムが明らかになった．その始まりは経験ないし体験であり，自発的な問題提起がなされ，更に答え探求の種々の試みが行なわれると，発見的洞察が生起し，最後に問題に対する答えが確定される，という筋道（メソッド）である．われわれはこれを，『中庸』[2)]の動的構造から借りて，「学→問→思→弁→行」の5つの契機を持つダイナミズムであると考え，発見的認識母型と名付けた．この認識母型が知的習性となり，創造的力を秘めたバネとして身につくことができれば，ただ知識を他者から受けそれに甘んじるだけでなく，自らの意志で自発的にそのバネを発揮して，自立的思考を遂行し，自前の認識を累積的に展開出来るようになるだろう．

本稿では，そのような認識母型の展開を数学の分野で検証してみることにする．研究事例としては，多面体に関するオイラーの定理を取り上げる．オイラー自身による予想，コーシーによるオイラー予想の証明過程を我々は「学→問→思→弁」の認識母型の観点から分析する．またコーシー以降のオイラー定理の展開を，「学→問→思→弁」の認識母型の累積的展開として捉えるつもりである．

数学という最も厳密で堅牢な学問の岩盤をしなやかに掘り進み，自在に方向を取りながら豊かな成果を齎らしていく認識母型の創造力にぜひ刮目していただきたい．

教養部哲学研究室

§1　プラトン正多面体とオイラーの定理

小学2年の算数の教科書の中に，「いろいろな形」というテーマで種々の図形が紹介されている．辺・頂点・面・直角といった，恐らく生徒には分かりにくい概念を用いて，各図形の特徴を理解させようとしている．例えば，三角形と四角形の相違は，辺の数，頂点の数を数えさせ，それらの数の相違から分からせようとしている．

更に興味深いことに，サイコロのような立方体や直方体の箱についても，それらの辺・頂点・面の数を具体的に数えさせ，そこからそれら空間図形の特徴や相違を把握させようとしている．高等数学（例えば，多面体に関するオイラーの定理など）への糸口が既にこの低学年においても実に巧妙に仕組まれていることには感心させられる．

教師がこの単元の中で，自分が作成した5個のプラトン正多面体，つまり正4面体，正6面体，正8面体，正12面体，正20面体を生徒たちに示し，「昔，宇宙を構成している4つの元素である火，土，水，空気，それに宇宙全体の形がこれらの形をしていると考えていた人[3)]もいました．また惑星の運動を球（玉）とこの5つの形から説明しようとした人[4)]もいました．これらの考え方から出発して何人も立派な科学者が生まれましたよ」と話してやるなどの工夫をこらせば，更にすばらしい教育効

果が望めるだろう．児童の心は模型の正多面体を前に，神秘と畏敬の念で一杯に満たされることと思う．プラトン，ケプラー，ハイゼンベルクなどの話は児童の心に奥深く刻まれ将来，宇宙の神秘を解明してみようと心に期する児童もきっと出てくるだろう．

胸をわくわくさせるこのような科学史の話の後で，生徒たちに5つのプラトン正多面体の頂点，辺，面の数を数えさせればよい．生徒たちは神秘的な立体を手にし恭しく数えたてることだろう．

それから，頂点の数，辺の数，面の数の間に何か面白い規則的な関係がないか，生徒たちに提案するよう教師に勧めたい．クラス中，突飛で楽しいアイディアで満たされることだろう．頃合を見計らって，多面体相互を比較しやすいように表などつくらせればよい．表をながめて生徒たちはまた一頻り考え込むことだろう．

最後に黒板にかの有名な，多面体に関するオイラーの定理『頂点の数（V）－辺の数（E）＋面の数（F）＝２』を書いて，プラトン多面体の一つ一つについてそれが正しいことを生徒たちに確かめさせればよい．この経験も子供たちの心に深く刻みこまれることだろう．大学の数学科のトポロジーの授業で，一般的かつ厳密な証明と共にこの定理に再会することにでもなれば感激ひとしおであろう．

実はオイラー自身も最初はこの2年生の子供たちと大差ない仕方でその定理を発見したと思われる．つまり，任意の多面体の頂点，辺，面の数を一々調べて，それらの間の関係をいろいろ検討した結果，帰納的にその定理の予想に到達したと考えられる．実際，現代の数学者ポーリアはその著書『数学と蓋然的推理（仮訳）』[5]の中でオイラーの発見的過程をもっぱら帰納の過程として捉え類推的に再現しようとしている．ところで，このオイラー予想の最初の証明は19世紀を代表する一人，フランスの数学者コーシーによって成された．証明されたことで初めて，予想は定理へと昇格したことになる．しかし面白いことにコーシー以降も同定理をめぐり，証明（の試み）が累積的に展開されている．その歴史的，論争的様相については現代の数学史家ラカトシュが著書『証明と論駁』[6]の中でうまく対話風にまとめあげている．

以下，ポーリア，ラカトシュの分析を参考に，オイラー予想の証明化，定理化の（種々の試みの）歴史的な累積的展開を，発見的認識のベーシック・メソッドである「学→問→思→弁→行」，特に狭義の認識論的部分である「学→問→思→弁」の観点から，模式的且つ段階的に再現してみよう．なお発見的認識のベーシック・メソッドをわれわれは発見的認識母型とも言い習わしており以下の考察では短縮して，認識母型という用語で表すことにする．

その前に，3次元空間に関するオイラー予想のいわば理念的前史にあたる2次元図形について，上記の認識母型に従って独自に想定した展開を紹介する．

§２　多角形に関するオイラー前史の認識母型展開

(1)学＝経験の段階：「平面図形における多角形に関して頂点の数（V）＝辺の数（E）は，多角形を見知っている者なら誰もが直観的に分かっており，疑うことすらない極めて自明なことである．例えば，三角形は$V=E=3$，四角形は$V=E=4$など」

(2)問＝問いの段階：「それでは本当に，任意のn多角形の場合も$V=E$だろうか，多角形というと人は通常凸多角形を表象するが，星形のようなものとか，一部がギザギザの形状のものとか，一部曲線のものなどはどうだろうか」

(3)思＝答え探求の段階：「以上のような問に答える種々の試み．例えば，問題として取り上げられた図形の一つ一つの頂点，辺を数えて，両者がイコールであることを明示するなど．しかし，このようなやり方では無限の図形について検証する作業は無限に終わることはないだろう．或いは，表象に頼るのではなく，多角形の概念そのものに目を付けn角形の概念にはN個の角，N個の辺があることが内包されており，概念の分析だけで頂点の数＝辺の数が明示されると主張する方針もありうる．しかし，その概念の内包なるものを分析的に探索すると，あまりに多くの内容が不確定のまま前提されていることに気付かされ，前提が少しでも変更されれば必ずしもイコールにならないことが容易に示される（後で反例を示そう），となると単純に概念の分析だけでイコールであると断定的に答えられはしない．或いは，多角形は頂点の数＝辺の数となるように構成（作図）されうることを示して，かくの通りと主張する仕方もありうるが，原理的に（コンパスと目盛りのない定規だけを用いるというユークリッド的条件のもとで）作図不可能となる多角形の場合はそのやり方ではイコールであることを示すことはできない．それではと又もや概念に戻ると，上述

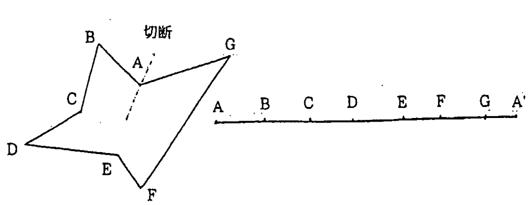
の問題性が起こる．ともかく，概念に含意されている諸前提を自明とせず顕在化する必要があるだろう」

(4)弁＝答え，つまり証明の段階：「(多面体に関するコーシーの証明法を試みに2次元に適用して独自に）証明を以下試みる．証明すべき問題は「任意の多角形に関してV（頂点の数）＝E（辺の数）であるか？」というものである．

証明以前の主張を単に「予想」と呼ぶとしたら，「任意の多角形に関してV＝Eである」という肯定命題は予想にしかすぎない．仮に「前・オイラー予想」と名付け，以下，この予想を証明し定理へ昇格させよう．

① 任意の多角形を一つの頂点のところで断ち切り（何を用いて断ち切るかはここでは問題にせず）それを線状に伸ばす．(これは2次元の問題を1次元に還元しようという目論みで，3次元多面体に関するコーシーの方法論に倣うものである)．

任意の多角形の例として以下のような図形を表象しよう．その図形の頂点Aのところで切断し左右に伸ばすと両端がAおよびA'の線分が出来る．ただし切断によって新たに生じた端点をA'とする．



② 切断したことによって頂点の数が一つ増えた．即ち頂点Aが切断によって，二つの頂点AとA'に変わる．従って閉じた2次元の多角形に関する当初の課題，つまりV＝Eの証明問題は，線状に伸ばした1次元の線分AA'の場合，Vが1つ増えてしまっているので，上式の右辺を1つ増やす必要があり，従ってV＝E＋1を証明すればよいことになる．

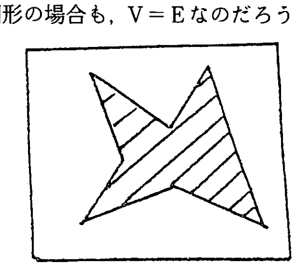
③ さて，線状に開いた多角形の端のどちらからでもいいが，端から一辺に当たる線分を一つずつ取り外していく．例図の場合，例えば線分GA'，線分FGといった風に順に取り外していく．一辺分を取り外すごとに，線分全体の辺の数，頂点の数は同時に一つずつ減っていく．しかし，そのように取り外していく限り，V＝E＋1という点には変化はない筈である．従って取り外しの各段階で，残りの線分全体について，あくまでV＝E＋1を証明すればよい，という事態にもなんら変化はない．だが証明はまだせず，取り外しの作業を進めていこう．

④ このように取り外しを続けていくと，最後に一辺分の線分（例図では線分AB）のみが残る．この一線分について，V＝E＋1を証明すればよい．そうすれば翻って，元の閉じた多角形についてV＝Eを証明したことになる筈である．

⑤いよいよ証明．最後の一線分は，2つの端点（頂点＝V）と一つの辺（＝E）を持つ．従って確かにV＝E＋1．かくして元の任意の多角形に関してはV＝Eが証明されたことになる．今や「前・オイラー予想」と我々が名付けた予想は，「前・オイラー定理」に昇格した．任意の平面図形に関して，V＝Eであることを漠然と感じていたり，或いは直観的に分かっているだけでなく，真か偽かどちらかなのかという弁別的批判的問に対して，真であると証明もされ，当初の問は最終的決着に至ったわけである．

(5)新たな学＝上記の定理を証明ないし学習した経験：「任意の平面図形に関して，V＝Eであることを自ら証明して知識として持っているか，その知識を学校やテキストで学んだりするなどして既知の真理として信じているか，のどちらかの段階（実際はこの拙論で初めて証明されたのだが)」

(6)進んだ問＝先の問よりも一段階進んだ問の段階：「進んだ学の段階の誰かがふと次のように自問することがありうる．この証明で果たして本当に，任意の多角形がすべてV＝Eであることが証明されたのだろうか．証明する際に自明だと思い込んでいるところに，何か落し穴はないのだろうか．多角形と言えば人は当然のことのように，面の中に空洞を持たない図形を想定するが，例えば下図のような，内部に或る多角形の穴を持つ多角形も，多角形に属するのではないか．このような図形の場合も，V＝Eなのだろうか」



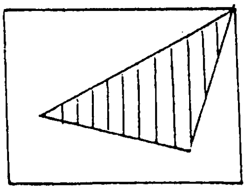
(7)進んだ思＝進んだ問に対する答え探求の段階（省略）

(8)進んだ弁＝進んだ問に対する答えの段階：「例示された図形に関して言えば，内部の多角形も明らかに，最初の証明と同じ手順でV＝Eが証明できる．他方外縁を形づくる多角形がV'＝E'であることは最初の段階で既に証明されているのであるから，この図形は全体としてV＋V'＝E＋E'，即ちこの図形の頂点の数を単純にVとし辺の数をEとすると，V＝Eであることが簡単に証明された．

一般的に，内部に任意の多角形の穴を持つ任意の多角形はすべて，V＝Eなのである」

(9)更に新たな学＝多角形の穴を持つ多角形について，前・オイラー定理の証明ないし学習の経験

(10)更に進んだ問＝多角形の穴を持つ多角形に関して証明された前・オイラー定理に対する新たな疑問：「内部に次のような穴を持つ場合はどうか．この場合明らかにVは6個，Eは7個．従って，V≠E」



(11)更に進んだ思＝更に進んだ問に対する答え探求の試み（省略）

(12)更に進んだ弁＝更に進んだ問に対する答えの段階（省略）

このように，問は更に一層多岐にわたって進展することだろう．例えば多角形の分類問題が出てくるだろう．V＝Eを満たす多角形をオイラー多角形，V≠Eの多角形は非オイラー多角形などと大別するといった具合に．ともかくV＝Eの証明と反例をめぐる発見的認識母型の累積的進展を通じて，多角形とな何か，といった風に多角形概念そのものが再検討され，再定義される方向に発展することになろう．

§3　3次元空間の多面体に関するオイラー予想の認識母型展開

3次元の多面体に関するオイラー予想は，前節の2次元多角形をめぐる前・オイラー予想と類比的な問題ではあるが，しかし次元は同じ2次元レベルではなく，次元を一つ上げた高次の問題であると言える．このように認識母型の進展には，前節のように同じ次元で進行する同次元的なものと異次元的なものとに区別することができる．

以下，多面体に関するオイラー予想の認識母型的展開を，ポーリア，ラカトシュの研究を参考に，独自に模式的に分析してみよう．

(1)より高次の問（次元に仮に番号をつけ，3次元の問とでも呼んでおこう）：「平面図形の多角形には，通常（?），V＝Eという関係が証明されるが，果たして3次元空間の多面体の場合はどうだろうか．頂点の数（V），辺の数（というより稜の数，E），面の数（F）の間にも何らかの規則的関係が見出だされるのだろうか．差当って，5つのプラトン正多面体はどうだろうか」

［註：オイラーが多面体の3つの要素間の関係に規則性があるかもしれない，と関心を持ったのは，多分偶然のことだったに違いない．§1で指摘したように，5つのプラトン正多面体は元素の形状としても，またユークリッド原論の最後の作図問題としても有名で，ケプラーはその重要性を鑑みて，球体とそれに内接・外接する正多面体との組合せから惑星運動を説明しようと試みたほどである．オイラーは，神秘的な正多面体の模型をじっと見つめているなどしていた或る瞬間に，3つの要素間に何か規則性があるかもしれないと，ふと問題意識を抱いたのかもしれない］

以下，コーシーの証明までのプロセスは，ポーリアの分析を参考に，独自にイメージ再構成したものである．

(2)3次元の思＝プラトン正多面体に限定した3次元の問に対する答えの試み

①5つのプラトン正正多面体の面の数（F），稜の数（E），頂点の数（V）を数え上げて以下のようなリストをつくり，その間に何か規則性がないか頭をめぐらす．

	F	E	V
正4面体	4	6	4
正6面体	6	12	8
正8面体	8	12	6
正12面体	12	30	20
正20面体	20	30	12

②この表ではどうも規則性が見つかりにくいため，何らかの規則的関係が見えてくるように上の表の立体の順序を並びかえたり，F，V，E欄を変えたり，さまざまな工夫をしてみる．

［註：それらの工夫の際には，デカルトの『精神指導の規則』[7]に従って，いっぺんに多くの観点を変化させず，せいぜい2項目程度変化させてその効果をじっくり見ること．例えばVとE欄を交換させ，それで規則性が出てこないか見る．見えない場合は更にその上，立体の順番を稜の数（E）の順に変えてみるなどしてみる］

	F	V	E
正4面体	4	4	6
正6面体	6	8	12
正8面体	8	6	12
正12面体	12	20	30
正20面体	20	12	30

③新たな表をじっくり眺めていると，そのうち，F＋V－2＝Eという関係性に気付く（ロナガンの「発見的洞察」[8]）

(3) 3次元の弁＝プラトン正多面体に限定した3次元の問の答え獲得：F＋V－2＝Eの洞察が果たして真か偽かの反省的批判的問は，目の前の模型を実際に数えば確証される．確かにそうであることが検証されるので，最初の問は弁に至ったと言える．

(4) 3次元の進んだ問：「プラトン正多面体についてはF＋V－2＝Eが確証されたが，それ以外の任意の多面体についても，F＋V－2＝Eが成り立つ，との仮設が頭に浮かぶ（オイラー予想とその定式化）．
果たしてそうだろうか」

(5) 3次元の進んだ思＝3次元の進んだ問に対する答え探求，つまりオイラー予想を確証する為の種々の試み

①オイラー予想の検証のために他の多面体についても模型などつくり，F，V，Eを数え上げて上記と同様の縦欄順序をもつリストをつくり，各多面体について，果たしてF＋V－2＝Eが成り立つかどうかを調べる（具体例による検証の試み）

	F	V	E
3角錐（正4面体）	4	4	6
4角錐	5	5	8
3角柱	5	6	9
5角錐	6	6	10
立方体	6	8	12
8面体	8	6	12
5角柱	7	10	15
1角を切り取った立方体	7	10	15
立方体の上に4角錐の屋根	9	9	16

②調べ上げた限りの多角形については真であることが直ちに検証されるが，他の多面体についてもそうであるかどうかを，更に検証する．

そのために次から次へとさまざまな多面体を想像し検証を行なう．しかしそれだけでなく証明が出来るならば証明も試みる（多面体の一部の領域の弁）．

例：(a)任意のｎ角柱．その面の数は，上底が一つ，下底が一つ，側面はｎ面，よってF＝ｎ＋2．次に頂点を考えると，上底にｎ個，下底にｎ個であるから，合計V＝2ｎ．稜の数は，上底にｎ本，下底にｎ本，そして側面にもｎ本であるから合計E＝3ｎ．従って，F＋V－2＝(ｎ＋2)＋(2ｎ)－2＝3ｎ＝Eで，確かにオイラー予想を満たす．

(b)任意のｎ角錐についても同様に簡単に証明できる．面の数は底が一つ，頂点から底へ向けての側面の数はｎ面，従ってF＝ｎ＋1．頂点はてっぺんが一つ，底面にｎ個，従ってV＝ｎ＋1．稜は底面の辺に相当する部分がｎ本，てっぺんから底面に向かって筋となって流れ落ちている線がｎ本，合計E＝2ｎ．よってF＋V－2＝(ｎ＋1)＋(ｎ＋1)－2＝2ｎ＝E．かくしてこれもオイラー予想を満たす．

このように検証例，部分的証明は無限に増えるだろう．（想像，思考実験例による検証および部分的証明の試み）

③しかし，単に多くの具体例によって検証数を増大

させ，部分的な証明に成功しても，それだけでは任意の多面体に対するオイラー予想の一般的証明とはならない．従って，オイラー予想の弁に至っているとは言えないのである．

(3) 3次元の進んだ弁：3次元の進んだ問に対する答え獲得（本格的証明）：オイラー予想の最初の本格的証明はコーシーによってなされた．ラカトシュによる簡明な解説を基に，コーシーの証明プロセスを復元してみよう．

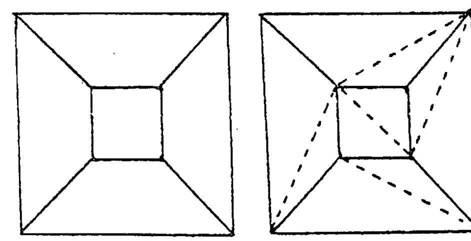
① 課題は，任意の多面体に関してF＋V－2＝Eを証明することである．0次元から2次元へと，次元の低から高の順序に従って上記の式の変数の順番を書き替えると，証明すべきオイラー予想の式はV－ E＋F＝2に他ならない．

いま，任意の多面体を想定し，そこから一つの面を切り取ったと想像しよう．そして，一面を切り取られ穴の開いた残りの多面体を，あたかもゴムのような柔軟な素材でできているかのように，前後左右に引き伸ばして平面にしてしまう（どこも破かずに引き伸ばすことができると仮定することにして)，つまり，3次元から2次元へ次元を降ろす．ところでこの2次元化された多面体は，面が一つ切り取られたため，その面の数は一つ減ることになる．しかし頂点や稜（辺）の数には変化はない．

かくして2次元へと伸展させられた多面体について証明すべき式は，V－E＋F＝2－1，即ち，V－E＋F＝1となる．

［註：なぜ2から1を引かなければならないかを立方体（6面体）の例で説明すれば，面を一つとって6面体を平面図に広げるとFはもちろん5面となり，他方，頂点の数8と辺の数12は変わらず，従って上記の式にこれらの数をそのまま当てはめると，V－E＋F＝8－12＋5＝1となる．つまり，1面をとった2次元の図形に適った式にするためには，3次元立方体のときのFの数から余分な1面分を差し引かなければならないのである．右辺から1を引くとはそういう意味である．これを一般化すれば，任意の3次元多面体から面を一つ取って平面へと伸展した図形についてのオイラー予想の式は，V－E＋F＝2－1＝1となる．将に証明すべきはこの式になる］

②次に，平面に伸展させられた多面体の各面に対角線を引き，各面をいくつも三角形に分割する．対角線をうまく引けば各面をそれぞれ最小の数の三角形で覆うことができる．すべての面にそのような三角形分割を施すと，平面化された多面体はいまや下図のような三角形の網状組織に変化していることになる（ラカトシュのサイコロの例参照)．



その際V，E，Fは何らか変化するのだろうか．まず，頂点の数（V）は変わらない．面の数（F）と辺（稜）の数（E）は確かに増える．新たに作られた三角形の面がFに含まれてくるし，その三角形の辺がEに含まれくる．しかしよく考えると，面の数Fと辺の数Eの増え方は全く同じになる．以下簡単に自己流の証明をしておこう．

辺の数であるが，n多面体の一つの面が切り取られた残りのn－1面の各面（＝或る多角形）に対角線を施して最小限の三角形分割をつくる際，各面の一頂点から引かれる対角線の数だけ，辺の数が新たに増えることは確かである．一般的に頂点をm個もつ多角形の一頂点から引かれうる対角線の数は，少し考えれば分かるように，m－3本である．例えば三角形の場合は対角線の数は0本，四角形は1本，五角形は2本といった具合に．このように一平面だけで辺の数はm－3本増えるわけで，これがn－1個の平面全体になると，各面の対角線を加えればそれが全体として増えた辺の数になる．

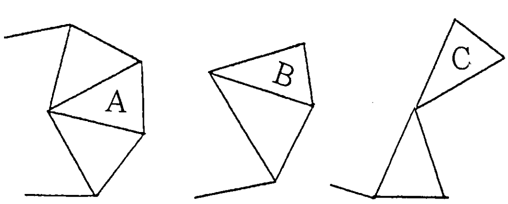
次に，三角形分割によって増える面の数を考察する．明らかに或る一点から引かれる対角線の数に1個分だけ多い数の三角形，即ち面が新たにつくられる．つまり，m多角形だとすると，m－3＋1＝m－2個分の新しい三角形が対角線を引くことによって生じる．しかし，最初のm多角形はそれ自身が全体として一つの面なのであるから，三角形分割によって純増する面の数はm－2－1＝m－3

になる．この数は，上記に考察した純増する辺の数と全く同じで，一つの平面に関してEとFの純増が全く同じことになる．このことは他の各々の平面についても事情は同じで，結局，三角分割によるEの数とFの数の全体の増加数は両者全く等しくなる．

かくして結論をまとめると，多面体から一個の面をとって平面へ伸展させた図形に三角形分割を施すとVの変化はナシ，他方EとFの増え方は等しい，となるのであるから，三角形分割前の平面図形について，V－E＋F＝1を証明するという課題は，三角形分割後も式そのものが変化しないことから，全然変化がないことになる．なぜならFの増加分もEの増加分も，F－Eで相殺されるからである．

これでいよいよオイラー予想を証明する準備が出来た．われわれは三角形分割された図形について，V－E＋F＝1を証明すればよいことになる．正にコーシーはこのやり方で証明を遂行した．以下，彼の証明プロセスに沿って弁＝証明を試みよう．

③さて，コーシーはこの三角形分割を施された図形全体から三角形を一つずつ取り除くよう指示する．その取り除き方は，外側に面している三角形から取るというやり方である．ところで，外側に面している三角形の在り方は図のように三通りある．



Aの場合，1辺のみが外に面している．Bの場合は2辺，Cの場合は3辺とも（つまり三角形全体が）外に曝されている．さて，三角形の取り除き方であるが，どうにかして，A，Bのようなタイプの三角形のみ順に取り除いていき，Cのような三角形が途中で現われないようにする．

Aのような位置の三角形を取り除くと，F，V，Eはどうなるかと言うと，面も辺も一つ減る．しかし，頂点の数は変わらない．従って，除去後もV－E＋F＝1の式は変わらない．

Bのような三角形を取り除く場合は，頂点は一つ減り面も一つ減り，辺は二つ減る．従ってこの場合もV－E＋F＝1は変わらない．

いま述べたような2通りの仕方で外側から三角形を取り除いていく限り，途中のどの段階もV－E＋Fは変わらないのであるから，途中どこかでV－E＋F＝1が証明されれば，オイラー予想は証明されたことになる．

しかしコーシーに倣って，証明はお預けにしたままで，三角形取り外しの作業をともかく最後まで貫徹しよう．

④上のやり方で取り外しを続けると，最後に一個の三角形が取り残されることになる．結局，この最後の三角形に関して，V－E＋F＝1を証明すれば，翻って，最初の空間図形である多面体について，V－E＋F＝2を証明したことになる．それでは証明しよう．

三角形は面が一つ，頂点が3つ，辺が3つ．従って，V－E＋F＝1．かくして，任意の多面体に関するオイラー予想は肯定的に証明され，単なる推測からいまや定理に昇格した．

［註：コーシーの証明のミソは，3次元多面体の問題を2次元の最小多角形である三角形の問題に上手に縮約したことである．しかしこれは完全な意味では彼の独創ではない．既にプラトン自身『ティマイオス』中の5つの正多面体を扱った箇所[3)]で，それらの立体のみならずすべての空間形象が，三角形という原基的平面の集合から如何に構成されるかを説明している．そうであるならば，立体の或る種の特質が，三角形の或る特質に還元できるかもしれないことはプラトンの読者ならまずもって考えつきそうなことである］

以上，オイラー予想をめぐる三次元レベルの問題意識（＝問）→三次元レベルの問に対する答え探求（＝思）→三次元レベルの問に対する答（＝弁），という発見的認識母型展開の解説であった．

§4　コーシー以降のオイラー定理をめぐる認識母型の累積的展開

ところで，このコーシによる証明でオイラーの多面体定理の歴史的展開は完結しはしない．例えば，具体例による検証の試みの際，マグナス J ウェニンガーの『多面体の模型』[9]中の多面体を片っ端から調べるとよい．するといずれ，オイラーの推測の反例にいくつも出くわすことになろう．ギザギザ状のもの，ウニ状のものなど(即ちケプラー星形八面体，小星形十二面体など)．更に想像力を駆使して奔放な思考実験を行なうとよい．中が空洞になっているもの，向こう側に突き抜けるトンネルを持つもの，額縁状のもの，多重になっているもの，円筒形，一部球状のもの，一部半球状のものなど，いくらでも考えられるだろう．オイラーの定理に対する反例や疑問例などがぞくぞく出てくる．新たな問題意識の発生であり，同じ三次元立体のレベルにとどまりながら，学→問→思→弁と更に展開するきっかけとなる．

さて，ラカトシュはコーシー以降のオイラー定理の証明の歴史を，先行者の証明に対する反例の発見，反証の試みおよび新たな証明努力と捉え，対話議論風に再構成しているが我々の立場からすればそのプロセスは，先行者の定理を学んだものが，「本当に証明されたのか，反例はないのか」と反省的問題意識を持ち，反例を見付けて定理の反証という弁を遂行し，それに対して定理擁護の目的から種々の工夫を施して新たな証明＝弁を目指すといった認識母型の更なる累積的展開に他ならない．

ラカトシュによると，この弁証論的対話の歴史を通じて最も深刻な影響を被ったのは，多面体の定義そのものであった．彼は見事にそれを浮き彫りにしている．以下彼の分析を参考に，学→問→思→弁の累積的展開が如何に多面体の定義の揺らぎを齎らしその変更を促していったのか，変遷の一部を図式的に再現しよう．

証明1　例のコーシーの証明，即ち①一つの面を切り取って伸展させる．この平面図形の$V-E+F=1$を証明すればよい．②平面に伸展せられた多面体に三角形分割を施す．$V-E+F=1$は変わらず．③三角形を，既述の2様の仕方で取り除いていく．その途中，$V-E+F=1$は不変．④さて，最後の三角形について，$V-E+F=1$．故に，任意の多面体に関して$V-E+F=2$は証明された．

反例1　立方体の中にもう一つの立方体が入っていてそこが空洞になっている空間図形（これも多面体ではないか)．まず，この図形は①一つの面を切り取って平面へ伸展させることができない．②しかも，$V-E+F=4$．つまりオイラーの定理に反している．

定義1　上記の反例を排除するための多面体の再定義の試み．「多面体は表面が多角形の面からなる立体である」(ルジャンドル)

定義2　定義1の改善．「多面体は多角形の系からなる表面のことであり」，立体とは無関係である．(ジョンキエール)

反例2　2つのバラバラにおかれた四面体をくっつけてみよう．2つの場合を考える．①一辺を互いに共有する仕方でくっついている，即ち，一辺のところでだけくっついている，そのような2個の四面体を一つの空間図形とみなす場合．②一頂点を互いに共有する仕方でくっついている，そのような2個の四面体を一つの空間図形と考える．

①②の両方とも，定義2に当てはまるが，$V-E+F=3$である．

定義3　反例2を排除するための再定義の試み．「多面体は，①どの辺においても正に2つの多角形が出会っている（従って，一辺のみにその出会いがある反例2の①は非ー多面体として排除される)．②任意の多角形の内部から他の任意の多角形の内部へ，いかなる辺とも一つの頂点のところで決して交差しない道を通って到達することができる（これによって，一頂点でしか往来する手立てのない反例2の②は排除される)」(メービウス)

定義P　想像されるあらゆる反例を一挙に排除するための定義の試み．PとはPerfect（完全な？）の頭文字のP．「多面体とは$V-E+F=2$の式が成り立つ多角形の系である」これによって，前記の反例として挙げられた多面体（多角形）はすべて，オイラーの定理を満たさない非（オイラー）多面体に堕す．(バルツアー)

［註：この最後の試みは，モンスター排除法と名付けられ，以後の一切の疑問や反例や知的発展をすべて封じる不毛なものと批判される．ベッドの丈に合

わない泊り客の脚を切り落とす恐ろしい宿屋に酷似している]

この後も，反例・再定義の変遷史は更に続くが，ラカトシュの理念史的分析の詳しい考察は後日に期して，上記の範囲内でのコーシー以降の変遷を簡単にまとめておこう．

多面体は通常，表面が多くの多角形から出来ている立体図形，という具合に漠然と想定されている．そして大抵は面の部分が立体の内側に凹んでいない凸多面体が表象される．そのような自明とされる多面体に対して，頂点の数，稜の数，面の数の相互の規則的関係性に関し，オイラーによってオイラー予想が立てられ，更にコーシーによって最初の本格的証明がなされたわけであるが，しかし，このコーシーの弁の試みに対して，それを学んだものが更に進んだ問題意識，「本当にオイラー予想はコーシーによって完璧に証明されたのだろうか」という批判的反省的問いを持つことがありうる．このような問題意識の中で疑問者がいろいろ工夫して反例を一つでも発見したり作ったりできれば，「すべての多面体は$V-E+F=2$」という全称命題は反駁され，オイラー予想の普遍性は破綻することになる．

ところで，コーシーの証明法に重点をおいた場合，彼の証明に対する反例は次の二ケースが典型的なものとなる．その一は，多面体の一つの面を取り除いて平面へ伸展する方法論をめぐるもので，コーシーは，すべての多面体はそのような仕方で平面へ展開できると信じ込んでいる（伸展できる多面体を仮にコーシー多面体と名付けよう）が，果たしてコーシー的に伸展できない多面体といったものは皆無だろうか（伸展できない多面体を一応非コーシー多面体と名付けよう）．もし非コーシー多面体が見つかれば，コーシーの証明から漏れた多面体がある，ということになる．従って，頂点の数などを一々数え上げられる単純なもの以外は，果たしてオイラー予想が成り立つか成り立たないかも証明さえできないという事態が生じる．ラカトシュはこのような非コーシー多面体を，ローカルな反例と名付けている．第二に，コーシーはすべての多面体につきオイラーの式$V-E+F=2$が成り立つことを証明したと称しているが，多面体と通常はみなしている立体の中にその式が成り立たないものがあるかもしれない．オイラーの式が成立する多面体をオイラー多面体と呼び，成り立たないものを非オイラー多面体と呼ぶと，非オイラー多面体の存在はそもそもオイラー予想を真っ向から否定する反例となるだろう．ラカトシュはこれをグローバルな反例と名付けている．

以上の2つのケースを組み合わせると，4つのタイプの多面体が分類できる．①コーシー・オイラー多面体②コーシー・非オイラー多面体③非コーシー・オイラー多面体④非コーシー・非オイラー多面体．

コーシー以降の再証明の試みは，①を正統な多面体として残し，他を非多面体として排除する工夫の歴史であったと概括できよう．つまり，②〜④は多面体とはみなさない，ということである．この試みは，多面体の通常の表象や定義の自明性を大きく揺るがし，①を護るために，定義の変更に継ぐ変更を生み出すことになった．というのは，立体を平面化して三角分割するというコーシーの証明方法は，漠然と「多くの面を持つ立体」くらいにしかイメージされていなかった多面体に，「コーシー的構成法を持ち且つ$V-E+F=2$が成立する立体」という，より確定的な定義内容を与えたからである．正にこれにより検証も反証も以前よりも確定的に出来る環境が整ったことになる．その後，コーシー的構成可能性の特性に代わる他の特性が発見，発案され，多面体に関するルジャンドルほかの新たな定義が提案されることになるのである．しかし新しい確定的条件が付けられる度に確定的反証の可能性（また確定的検証可能性）も高くなり，いずれ反例が発見されたり考案されたりすることになる．

このような過程を経ながら，奇しくも，空間領域に潜んでいた豊かな多様性がオイラーの定理をめぐって開発されてきたとも言える．他方，オイラー多面体以外は問の可能性すらシャットアウトする，という超保守的なモンスター排除法は，実り多い認識母型の展開の可能性を根元から廃絶する結果に至る．

§5　オイラーの定理の今後の進展と認識母型の自発的展開の課題

オイラー前史から始まるオイラーの定理をめぐる認識母型的展開の全体を形式的側面から総括すると．

オイラー以前，多角形について，2次元レベルの学→問→思→弁の展開が想定された．次に，その弁の成果を踏まえて，これに反するようなさまざまな多角形の反例が指摘されたり構想され，そこから，同次元レベルの進んだ問→思→弁が展開された．またこの成果に対して，同次元レベルの更に進んだ問→思→弁への進展が指摘され，これは無限に進むかに思われた．

オイラーに至って初めて同種の問題が3次元レベルで提起された．5つのプラトン正多面体に関する新たな問→思→弁の過程を経て，オイラー予想が立てられた．次に，それを他の多面体についても検証する試みである，進んだ問→思→弁が展開された．しかし，オイラー予想の証明に至る，より進んだ展開を実行しえたのはコーシーが最初であった．更にコーシー以降，この証明をめぐって次々に反例が出され，そられによって惹起された問題意識から，一層進んだ問→思→弁の展開が世代を超えてなされるのである．その歴史的過程を通してオイラーの定理は広がりと深みを増していき，その間，多面体は再定義の試みに多様に揺らぎ，結果として3次元空間に豊かな実りを振り撒いていったのである．

さて，これからの研究の進展であるが，同じ3次元レベルで更なる広がりが可能であるが，次元を上げて，4次元多面体に関して同じような問題意識を持つことはより楽しいことであろう．更に，5次元，6次元へと上げていき，一般的にｎ次元空間の多面体について，0次元の構成要素（頂点）の数，1次元の構成要素（辺＝稜）の数，2次元の構成要素（平面）の数，3次元の構成要素（立体）の数，4次元の構成要素の数，5次元の構成要素の数，そのように進んで最後にｎ－1次元の構成要素の数に注目し，それらの間にオイラーの定理に似た規則的な関係性はないかどうか問うことは，オイラーの定理を究極化，普遍化するという意味で当然の成り行きであると思われる．ところでｎ次元空間における，オイラー定理に該当する定理は現代数学において確かに既に成立している．しかし，どのような認識母型の累積的展開を経てその定理証明に達したのか，という問はラカトシュの研究を継承する数学史の研究者にとっては格好の博士論文的課題となるだろう．もちろん数学者にとっても現代の到達地点に対して「これは果たしてすべてのｎ次元多面体に関する最終的証明になっているのだろうか．反例はないのだろうか」と批判的反省的問を投げかけることは不可避かつ重大な課題と思われる．このように，本稿がクローズアップしたオイラーの定理というたった一つの問題に限っても，認識母型の展開は無限に続くかに思われるのである．

最後に，知的能力を持つ人間としての課題であるが，この認識母型を自発的に，しかも累積的に展開でき，またそれが知的習性としてしっかりと定着するようになるためには，認識母型を自覚的にかつ楽しく遂行する経験を出来るだけ多く積むべきであろう．

ただ知識を有しているだけで，問題意識も，また問題解決の気持ちも持たず自分の努力で判断にまで至ろうとしない，「学」だけの段階の人物を「学・者」と名付けるとしたら我々は「学者だけの人」にはなりたくない．また，知識を有し，多くの問題意識も持っているが，答え探求の努力は御免蒙りたい，というレイジーなタイプの人たちを「学問・者」と呼ぶとしたら，その段階にとどまりたくもない．また，学もあり問題提起もし，答えの可能性もいろいろ考えだしてはいるが，多数のアイディアを提出するだけで，そのどれが真か偽かを判定する最後の詰めは人任せ，といった無責任タイプを「学問思・者」と言うとしたら，そのような独り善がりの満足もはねのけたい．

各自，認識母型をどうにか遂行して「学問思弁・者」になれるよう，いや，実践をも含めて「学問思弁行・者」になれるよう互いに努め啓発し合いたいものである．
教育現場においては生徒や学生達にぜひ認識母型の意義を理解させ，自らの知的好奇心を奮い立たせて，この認識母型を自発的に展開できるよう導き，一人一人が自らの意志で認識母型を展開できる，そのような習性と能力が身につくよう教育したいと望むものである．

というのは，スクール（学校）の語源であるギリシャ語のスコレー（ゆとり）は，将にそのような認識母型を生徒各自が生活に追われることなく，私利私欲に塗れることなく嬉々として自発的に展開できるための物質的・時間的・精神的必要条件を意味していたのであるから．

注

1）拙著「発見的認識のベーシック・メソッド」東京家政大学研究紀要 42集 2002
2）『中庸』 講談社学術文庫 pp.139～140
3）プラトン 『ティマイオス』 プラトン全集12 岩波書店 1999 pp.87～96
4）ケプラー 『宇宙の神秘』 工作社 1982
5）Polya, G. “Mathematics and Plausible Reasoning” Vol 1 1954 pp35～41
6）Lakatos,I. “Proofs and Refutations” 1987 pp.1～176
7）デカルト 『精神指導の規則』 デカルト著作集第4巻 白水社 pp.11～120
8）Lonergan, B. “Insight” Philosophical Library London pp703～707

9）ウェニンガー，M.J.『多面体の模型』
教育出版社 1979

Summary

Euler, a French mathematician, found that for all regular polyhedra there is a nice relation between the number of vertices (=V), the number of edges (=E) and the number of faces (=F), the formula of which is V-E+F=2. From these facts, he guessed that the formula might apply for any polyhedron. Many mathematicians including Euler tried to verify the conjecture. The results seemed to prove it. But on that very moment, the critical question should be arisen as to the universal validity of that quasi-proof, "Is it really true that for any polyhedron V-E+E=2?" Now the basic heuristic mehtod which we defined as 学→問→思→弁→行 (experience→questioning→thinking→judging) starts to develop itself.

In this article, we observe the historical process of cumulative development of that creative method concerning Euler's conjecture and Cauchy's proof.