〔東京家政大学研究紀要　第20集(2), p. 7～11, 1980〕

規則的分布をした円形開口によるフラウンホーフェル回折模様の解析

内　田　　直

（昭和54年9月26日受理）

Analyses of Fraunhofer Diffraction Patterns from a Regular Distribution of Circular Apertures

Sunao Uchida

(Recived September 26, 1979)

はじめに

多数の不規則な分布をした同一形状からなるピンホール開口のフラウンホーフェル回折像は1個のピンホール開口による回折像の個数倍の強度になる．これにバビネの定理を適用すれば，多数の粒子の集まりからなる雲などの水滴の平均直径を求めることができる[1]．規則的に分布した同一形状からなるピンホール開口やある一定の統計的な法則によって配列された開口などの回折像は縞模様を呈することが知られている[2]．また，単純な円形開口の回折像などは開口の径が小さい程回折像の強度分布が拡大されるため，小開口径を精確に測定する手段ともなりうる．一方，2つの同一形状のピンホール開口が並んでいる時，その干渉縞は開口が接近している程縞間隔が広くなり二重星などの分解能向上に役立った[3]．光の干渉は回折理論の解析から導びくことができ，干渉と回折は波動光学によって説明できる一つの光学現象と言える．

さて，いくつかの同一形状の開口が規則的に分布している時の回折模様は各開口による回折光が互に影響し合うため色々な回折模様を呈する．特にいくつかの円形開口によるフラウンホーフェル回折模様は解析もし易い．

単1円形開口によるフラウンホーフェル回折

今，図1に示すように開口 S 内に原点Oをとり，開口面内に ξ, η 軸を持ち，観測方向に向いた z 軸を持つ直角座標系を考える．原点Oより $-z$ 軸方向に充分離れた所で，かつ z 軸から離れていない点に光源 P_0 があるとする．一方観測方向にもう一つの原点 O′ をとり，ξ, η 軸にそれぞれ平行な x, y 軸を持つ直角座標系を考え，これを像面とする．原点 O′ もまた原点Oより充分離れているものとする．さて，波長 λ の光が光源 P_0 から出てつい立て上の開口 S 内の1点 $Q(\xi, \eta)$ を通り，z 軸の近くの像面上の1点 $P(x, y)$ に達したとする．この時像面上の1点 P における回折光は開口全域にわたる回折積分で表わされる．ここでは像面上の回折光強度について論ずるため，強度に影響しない位相を省略した定数 C を使ってこの回折積分を複素数で表わす．

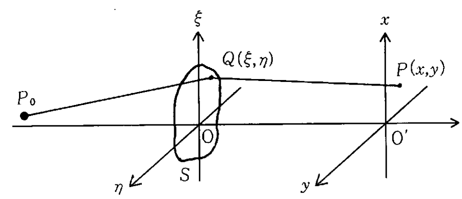


図1　フラウンホーフェル回折

光源 P_0 から出た光がつい立て上の開口の1点 $Q(\xi, \eta)$ を通った後，像面上の1点 $P(x, y)$ に達したとする．また光源および像面はいずれもつい立てから充分離れているものとする．

$$U(P)=C\iint_S e^{-ik(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta, \tag{1}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

つい立て上に半径 a の円形開口がある時，図1における $Q(\xi, \eta)$，$P(x, y)$ の点の直角座標を極座標に変換し $Q(\rho, \varphi)$，$P(r, \theta)$ として表わす．

物理学研究室
フラウンホーフェル回折模様（第2報）

$(\xi,\eta)\longrightarrow(\rho,\varphi)$ 変換では

$$\begin{cases}\xi=\rho\cos\varphi\\ \eta=\rho\sin\varphi\end{cases},\quad\begin{cases}\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\\ \varphi=\tan^{-1}\dfrac{\eta}{\xi}\end{cases}\tag{7}$$

となる．$(x,y)\longrightarrow(r,\theta)$ 変換では

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\quad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\end{cases}\tag{8}$$

となる。この時回折積分 (1) 式は変数変換 され，積分は $d\varphi$ について 0 から 2π まで $d\rho$ について 0 から a まで行なうものとして次式で表わされる．

$$U_0(P)=C\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ik(r\cos\theta\cdot\rho\cos\varphi+r\sin\theta\cdot\rho\sin\varphi)}\rho d\rho d\varphi$$

$$=C\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ikr\rho\cos(\varphi-\theta)}\rho d\rho d\varphi\tag{9}$$

この式の $d\varphi$ の項の積分は 0 次の第 1 種ベッセル関数を $J_0(kr\rho)$ と置き，β を任意の角としたときの 0 から 2π までの積分として表わされる．

$$J_0(kr\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_\beta^{2\pi+\beta}e^{-ikr\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi\tag{10}$$

また，1 次の第 1 種ベッセル関数を $J_1(kr\rho)$ とすれば，

$$\int\rho J_0(kr\rho)d\rho=\frac{\rho}{kr}J_1(kr\rho)\tag{11}$$

であるから，(10)，(11)式より(9)式の積分は次のようになる．

$$U_0(P)=CD\frac{2J_1(kar)}{kar}\tag{12}$$

ここで，$D=\pi a^2$ は円形開口の面積である．これより観測点 $P(x,y)$ での強度は像面中心強度を 1 に正規化して次式で表わされる．

$$I_0(P)=\left[\frac{2J_1(kar)}{kar}\right]^2\tag{13}$$

この(13)式は中心に極大を持ち，中心から離れるに従がい急激に減衰し強度零の極小値をとり，再び増加して中心強度より非常に小さい極大を経た後，極小，極大を繰り返す変化をとる．全体としての強度分布は中心に明るい円盤を持ち，そのまわりにしだいに暗くなる円環を持ったものとなる．これは一般にエアリー像として知られている[4]．

多数の円形開口の配列

つい立て上に同一半径 a の円形開口 S が多数ある場合，各開口内の同一点をそれぞれ $Q_1(\xi_1,\eta_1)$，$Q_2(\xi_2,\eta_2)$，… $Q_N(\xi_N,\eta_N)$ とする．この時(1)式は次のようになる．

$$U(P)=C\sum_{n=1}^{N}\iint_S e^{-ik\{(\xi_n+\xi)x+(\eta_n+\eta)y\}}d\xi d\eta$$

$$=C\sum_{n=1}^{N}e^{-ik(\xi_nx+\eta_ny)}\iint_S e^{-ik(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta\tag{14}$$

この(14)式の積分項は単 1 円形開口の積分であるから，極座標で求めた結果の(12)式に置きかえることができる．

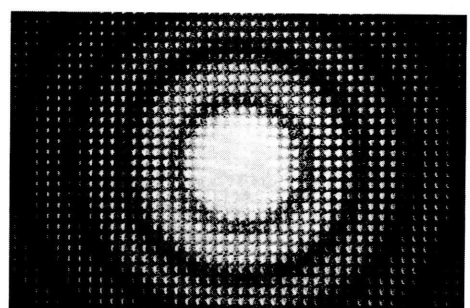
$$U(P)=U_0(P)\sum_{n=1}^{N}e^{-ik(\xi_nx+\eta_ny)}\tag{15}$$

これより，強度は中心強度を 1 に正規化して次のように表わされる．

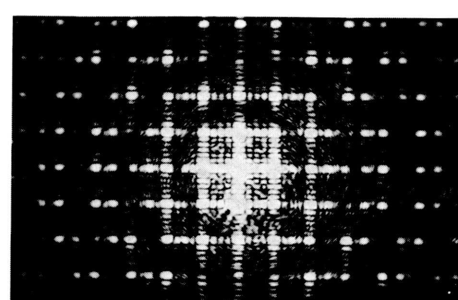
$$I(P)=I_0(P)\sum_{n,n'}^{N}e^{-ik\{(\xi_n-\xi_{n'})x+(\eta_n-\eta_{n'})y\}}\tag{16}$$

$$=I_0(P)\sum_{n,n'}^{N}\cos k\{\xi_n-\xi_{n'})x+(\eta_n-\eta_{n'})y\}\tag{16'}$$

ここで，n,n' のそれぞれについて 1 から N までの全ての



(a)



(b)

図 2　多数の規則的に並んだ円形開口によるフラウンホーフェル回折像

(a)は開口半径 0.075 mm，間隔 0.75 mm で規則的に並んだ多数の円形開口によるもので，(b)は開口半径 0.075 mm，間隔0.225 mm で規則的に並んだ 5×7=35 個の円形開口によるものである．

和を求めるものとする．(16) または(16)′ 式より多数の円形開口による強度分布は単1円形開口による回折像に$\sum$の項によって与えられる分布が掛け合わされたものとなる．

つい立て上に多数の円形開口が不規則に分布している場合，(16)または(16)′式で $n \neq n'$ にあたる所の各々の値は $+1$ と -1 の間にまんべんなく分布しているものとみなすことができ結果としては零となり，$n=n'$ の各々の値は1となる．この時(16)または(16)′式の$\sum$項はNとなるから，場所によりゆらぎがでるが，全体としての回折光強度分布は単1円形開口の強度のN倍となったものとなる．また，いくつかの円形開口が規則的分布をしている時は，$n \neq n'$ で与えられる項の値が $+1$ と -1 の間で特定な値をとることになり，強度分布も規則的分布をなし，回折模様となる．図2に多数の円形開口の規則的分布によるフラウンホーフェル回折模様を載せる．

直線上等間隔に並んだ円形開口

今，ξ 軸上に半径 a の円形開口が間隔 μa でN個並んでいる場合の回折像の強度分布を (16)′ 式から求める．この場合 (16)′ 式の$\sum$項のみについて論ずればよいから，これを F_N と置く．また，$\eta_n=\eta_{n'}$ であるから

$$F_N=\sum_{n,n'}^{N}\cos kx(\xi_n-\xi_{n'}) \tag{17}$$

となる．ここで開口がξ軸上に等間隔 μa で並んでいるから $\xi_n-\xi_{n'}=(n-n')\mu a$ となる．更に $\delta=k\mu ax$ と置いて(17)式を求めると，

$$\begin{aligned}F_N&=\sum_{n,n'}^{N}\cos kx(n-n')\mu a\\&=N+2\sum_{n=1}^{N}(N-n)\cos n\delta\\&=N+2\left(\frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}-\frac{N}{2}\right)=\frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\end{aligned} \tag{18}$$

となる．(18)式は $x=0$ の極大から始まり x 軸上に

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\mu a} \tag{19}$$

の間隔で同一極大をもつ分布となる．(19)式よりμが大きい程 Δx は狭くなる．Nが3以上の場合には Δx の間に挟まれた所に小さな2番目以降の極大も存在するが，N が大きくなれば2番目以降の極大の効果は小さくなる．全体としては Δx の間隔の極大が強調されたものとなる．

(18)式を (16)′ 式に当てはめれば直線上等間隔に並んだ円形開口の回折像強度分布が求まる．

$$I(P)=\left[\frac{2J_1(kar)}{kar}\right]^2\left(\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \tag{20}$$

ここで，$k=2\pi/\lambda,\ \delta=k\mu ax$ である．この(20)式は座標が極座標と直角座標の2通りの表示となっているが，この式の意味する所は単1円形開口によるエアリー像が間隔 Δx の特に強い極大を持つ縦縞（開口の並びと直角方向の縞）によって表わされたものとなる．特に2開口の場合は暗線の間隔も Δx となり，エアリー像がこの暗線の縦縞によって区切られたものとなる．

(18)式において $N=2$ とすれば，

$$F_2=\frac{\sin^2 2\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}=\frac{\left(2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}}=4\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{21}$$

となる．これは干渉理論から導びかれる2光束干渉と同じ形になる．ここでδは位相差を表わす．$N=3$ の場合には，

$$\begin{aligned}F_3&=\frac{\sin^2 3\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}=\frac{\left(3\sin\frac{\delta}{2}-4\sin^3\frac{\delta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\\&=\left(3-4\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^2=\left(4\cos^2\frac{\delta}{2}-1\right)^2\end{aligned} \tag{22}$$

となる．この3光束の場合，1次の極大は Δx の間隔をなすが，2次の極大がその中間の位置に1次の極大の2/9の強さで現われる．暗線となる極小値は(22)式において，

$$4\cos^2\frac{\delta}{2}-1=0$$

より，1次の極大の間を3等分するような $\Delta x/3$ の位置に2つ現われる．

規則的分布をした円形開口

ξ,η 軸からなる平面上に $N=n\times n$ 個の同一半径 a の円形開口が，ξ,η 軸方向それぞれについて等間隔 μa でもって正方行列をなすように置かれている時の回折像強度分布を調べる．いま，各開口の同一上の点を $G_{l,m}$（l,m はそれぞれ1から n までの値をとる）とすればその座標は $(\xi_{l,m},\eta_{l,m})$ で表わされる．ここに l はξ軸方向の位置を示す番号であり，mはη軸方向の位置を示す番号である．この時，(16)式の$\sum$項を $F_{n\times n}$ とおけば，

$$F_{n\times n}=\sum_{l,l'}^{n}\sum_{m,m'}^{n}e^{-ik\{(\xi_{l,m}-\xi_{l',m'})x+(\eta_{l,m}-\eta_{l',m'})y\}} \tag{23}$$

となる．ここで，l, l' および m, m' のそれぞれ全てについて1から n までの和を求めるものとする．間口がξ軸方向に等間隔 μa で並んでいることより，$\xi_{l,m}-\xi_{l',m'}$ は m, m' の値によらず，l, l' の値だけで決まり，

$$\xi_{l,m}-\xi_{l',m'}=(l-l')\mu a$$

となり，同じ理由から

$$\eta_{l,m}-\eta_{l',m'}=(m-m')\mu a$$

となる．従って(23)式は

$$F_{n\times n}=\sum_{l,l'}^{n}\sum_{m,m'}^{n} e^{-ik\{(l-l')\mu ax+(m-m')\mu ay\}}$$

$$=\sum_{l,l'}^{n}\sum_{m,m'}^{n} e^{-ik(l-l')\mu ax}e^{-ik(m-m')\mu ay}$$

$$=\sum_{l,l'}^{n} e^{-ik(l-l')\mu ax}\sum_{m,m'}^{n} e^{-ik(m-m')\mu ay}$$

$$=\sum_{l,l'}^{n}\cos k(l-l')\mu ax\sum_{m,m'}^{n}\cos k(m-m')\mu ay \quad (23)'$$

となる．この(23)′式は2つの $\sum$ 項よりなる積となっているが，各$\sum$項は直線上等間隔に並んだ場合に求めた(18)式の F_N と全く同じ形式となっている．ここで

$$\delta_1=k\mu ax,\quad \delta_2=k\mu ay$$

とおき，(23)′式を求める．

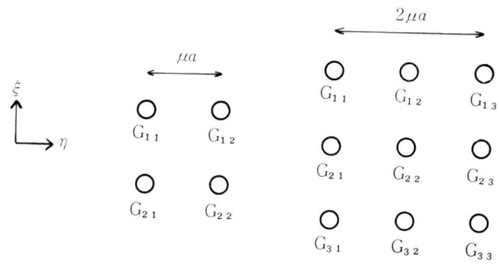
$$F_{n\times n}=\left(\frac{\sin n\dfrac{\delta_1}{2}}{\sin\dfrac{\delta_1}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin n\dfrac{\delta_2}{2}}{\sin\dfrac{\delta_2}{2}}\right)^2 \qquad (24)$$

この(24)式を(16)式に代入すれば，つい立て面上に $n\times n=N$ 個の半径 a の円形開口が縦横に等間隔 μa でもって正方行列形をなして並んでいる時のフラウンホーフェル回折像の強度分布が求まる．

$$I(P)=\left[\frac{2J_1(kar)}{kar}\right]^2\left(\frac{\sin n\dfrac{\delta_1}{2}}{\sin\dfrac{\delta_1}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin n\dfrac{\delta_2}{2}}{\sin\dfrac{\delta_2}{2}}\right)^2 \qquad (25)$$

この分布は中心に最大強度を持ち円環状に拡がる単1円形開口によるエアリー像が基本となり，これに開口の並びの方向，つまり x 軸方向と y 軸方向の互に直角な方向のそれぞれに直線上の開口による回折像強度分布に従がった明るい部分と暗線によって特徴ずけられた縦横の縞の重なりからなっている．Nが充分大きければ，全体としては正方形格子の交点上に特に明るい点を持ち，これが中心から離れるに従がい暗くなり続いて明るくなり，外に行く程急激に減衰する円環状の強度分布となる．

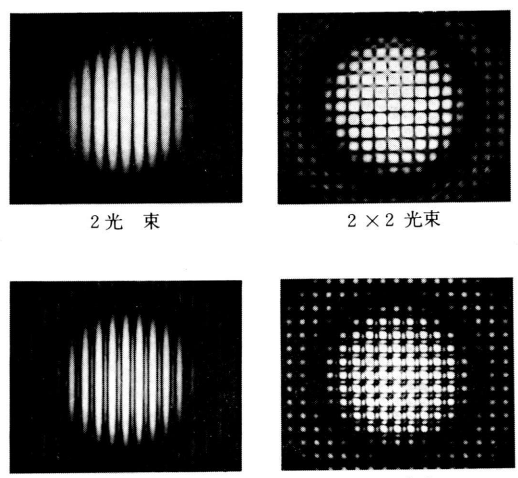
ここで $N=2\times2$ の場合は図3(a)のように辺の長さ μa の正方形の角に半径 a の円形開口が4個置かれたものと



（a）2×2　　　（b）3×3

図3　規則的分布をした円形開口

$N=2\times2$ の4個および $N=3\times3$ の9個の正方行列形の半径 a の円形開口がξ, η 軸方向それぞれに間隔 μa で並んでいることを示す．



2光　束　　　2×2 光束

3光　束　　　3×3 光束

図4　規則的に並んだ円形開口によるフラウンホーフェル回折模様

いずれも開口半径 0.075 mm，間隔 0.75 mm の場合のフラウンホーフェル回折像である．ここでは強度分布が互に比較できるようにするため中央付近のエアリーの円盤上の回折像を示した．

して表わせ，(24)式を(21)式を参考にして解くと

$$F_{2\times2}=16\cos^2\frac{\delta_1}{2}\cos^2\frac{\delta_2}{2} \qquad (26)$$

となる．また $N=3\times3$ である図3(b)の場合には(24)式を(22)式を参考にして解けば

$$F_{3\times3}=\left(4\cos^2\frac{\delta_1}{2}-1\right)^2\left(4\cos^2\frac{\delta_2}{2}-1\right)^2 \qquad (27)$$

となる．図4に2光束開口，3光束開口及びこれらに対応させて 2×2 開口と 3×3 開口の場合のフラウンホー

フェル回折像を載せる.

おわりに

多数の同一円形開口が規則的に分布している時のフラウンホーフェル回折像は一定の対称性を持った回折模様となる. この回折模様を回折積分から解くには少々複雑な手続きを必要とする. 本報告ではつい立て上縦横いずれにも等間隔をなしている, n 行 n 列の正方行列形に置かれた $N=n\times n$ 個の円形開口による回折積分が, 単1円形開口による回折積分と2光束干渉と同じ結果を得る2つの円形開口による回折積分を基本形として求められることを示した. 単1円形開口のエアリー像のように中心から円環状に拡がる強度分布を持っている場合は極座標表示が適当であるが, 2光束干渉のような場合には縦横に強度分布が拡がるため直角座標表示がより適当である. そのため, ここではつい立て上に並んだ円形開口の回折積分を極座標と直角座標の全く異なる座標系により求めた. しかし; 回折模様の強度分布を知るためにはこの方法が適当であった.

文　献

1) 久保田　広：波動光学, 岩波書店, 東京 (1971) p. 264

2) M. Born and E. Wolf : *Principles of OPTICS*, 5th ed., Pergamon Press, London, 1975, p. 398

3) 久保田　広：波動光学, 岩波書店, 東京 (1971) p. 93

3) 内田　直：東京家政大学研究紀要, **19**, 1 (1979)