

# 数字形開口による回折縞

内田 直

(昭和53年9月29日受理)

## Fraunhofer Diffraction Fringes for Apertures of the Arabic Numerals

Sunao UCHIDA

(Received September 29, 1979)

### 緒 言

光の回折現象の波動論的説明は19世紀始めフレネルによって、ホイゲンスの原理とヤングの干渉の理論的説明として始まった。その後19世紀後半にはキルヒホッフによってフレネルの回折理論の数学的基礎が与えられた<sup>1)</sup>。キルヒホッフの回折理論は現在まで光学の色々の分野に適用されるに致っている。このキルヒホッフの回折理論から導かれる結論としてフレネル回折があるが、フレネル回折は一般式であり解を求めるには複雑な手順を必要とする。しかしある一定条件下では、より簡単なフラウンホーフェル回折として扱うことができる。

ここでは He-Ne レーザーを単色光源として、つい立て上に開けられたアラビア数字の形の開口によるフラウンホーフェル回折像について実験した。

### 理論的考察

図1に示すように光源  $P_0$  から出た波長  $\lambda$  の光をレンズAにより平行光束とし、この平行光束を無限遠に焦点を合わせた焦点距離  $f$  のレンズBにより  $O'$  点に像を結ばせる。 $P_0$  と  $O'$  を結ぶ線を  $z$  軸とし、レンズAによる平行光束は  $z$  軸と平行になっているとする。ここでレンズAとBの間の  $z$  軸上に原点  $O$  をとり、ここに  $z$  軸と直角な  $\xi, \eta$  軸を持つ平面を考え、この平面上にレンズA, Bより充分小さい任意の開口を持ったつい立てを置く。このとき、この開口により  $O'$  を原点とする  $xy$  面、つまり像面にフラウンホーフェル回折像が生ずる。但し、 $x, y$  軸はそれぞれ  $\xi, \eta$  軸に平行と

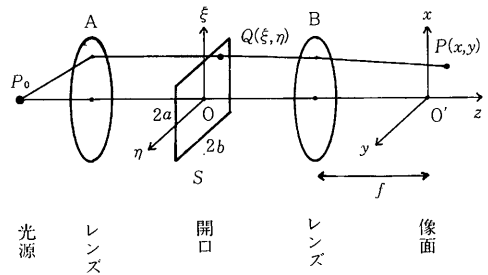


図1 回折光学系

光源  $P_0$  から出た光はレンズAにより平行光束となり、小開口  $S$  を通過した後レンズBにより集光される。このときレンズBの焦点面上付近にフラウンホーフェル回折像が生ずる。

する。開口面上の一点  $Q(\xi, \eta)$  を通過した光が像面上の1点  $P(x, y)$  に達したと考えれば、像面上の  $P(x, y)$  における回折光は開口全域にわたっての  $\xi, \eta$  による回折積分として与えられる。位相の項を省略した定数  $C$  を使えばこの積分は次式で表わされる。

$$U(P) = C \iint_S e^{-iK(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta, \quad K = \frac{2\pi}{\lambda f} \quad (1)$$

図1において辺の長さが  $\xi$  軸方向に  $2a$ 、 $\eta$  軸方向に  $2b$  の矩形開口とした時、この開口によるフラウンホーフェル回折積分は(1)式において  $-a$  から  $a$  及び  $-b$  から  $b$  までの二重積分を行なうことによって得られる。

$$\begin{aligned} U(P) &= C \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-iK(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \\ &= C \int_{-a}^a e^{-iKx\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-iKy\eta} d\eta \\ &= CD \frac{\sin Kax}{Kax} \cdot \frac{\sin Kby}{Kby} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $D=4ab$  は矩形開口の面積である。

物理学研究室  
フラウンホーフェル回折模様 (第3報)

よって点  $P(x, y)$  における強度  $I(P)$  は像面中心の強度を 1 に正規化して表わせば次式となる。

$$I(P) = \left( \frac{\sin Kax}{Kax} \right)^2 \left( \frac{\sin Kby}{Kby} \right)^2 \quad (3)$$

ここで(3)式の右辺を次のように表わしておく。

$$Fx = \left( \frac{\sin Kax}{Kax} \right)^2 \quad (4)$$

$$Fy = \left( \frac{\sin Kby}{Kby} \right)^2 \quad (5)$$

この(4)(5)式は互に同じ性質の関数であり、 $a$ 、 $b$ の値により一定の関係を持つ。(4)式については  $x=0$  で中央の極大値をとり、

$$Kax = \pm m\pi \quad (m=1, 2, \dots) \quad (6)$$

で  $Fx=0$  なる極小値をとる。この極小値  $m$  と  $m+1$  の間には 2 番目以降の極大値があり、 $m$  の増大と共に急激に減衰する。(6)式で表わされる暗線(極小値)の間隔は  $y$  軸上の両側に分布する  $m=1$  の項では

$$\Delta x_0 = \frac{\lambda f}{a} \quad (7)$$

であり、 $m=2, 3, \dots$ のときは  $m$  と  $m+1$  との間隔は、

$$\Delta x = \frac{1}{2} \Delta x_0 = \frac{\lambda f}{2a} \quad (8)$$

となり等間隔である。同様にして(5)式については  $y=0$  で中央の極大値をとり、

$$Kby = \pm n\pi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (9)$$

で  $Fy=0$  なる極小値をとる。 $x$  軸上の両側  $n=1$  の項ではさまれる中央の明るい縞の間隔は、

$$\Delta y_0 = \frac{\lambda f}{b} \quad (10)$$

であり、 $n=2, 3, \dots$ のときの  $n$  と  $n+1$  との間隔は

$$\Delta y = \frac{1}{2} \Delta y_0 = \frac{\lambda f}{2b} \quad (11)$$

となり等間隔である。

以上により矩形開口による回折光の強度分布は  $x$  及び  $y$  軸にそれぞれ平行な強度零の暗線に囲まれた部分の合成として観察される。しかも、 $x$ 、 $y$  軸双方から離れた所での強度は軸上の強度分布より非常に弱くなっている。矩形開口の辺  $2a$ 、 $2b$  の値がそれ程異ならなければ、これによる回折光強度の分布は原点に中央の極大を持ち、 $x$ 、 $y$  各々の軸上に 2 番目以降の極大が強度零を間にはさんで分布し、その強度は原点から離れるに従って急激に減衰したものとなる。数番目の極大までを考えると  $x$ 、 $y$  軸方向それぞれに明るい斑点が十字形に広がった回折

像となる。 $a$  と  $b$  の値に差がある場合、例えば  $b=va$  のスリット状の開口を考える。像面上の回折光強度の変化は(8)式と(11)式を比較すれば、 $x$  軸上の暗線の間隔に対して  $y$  軸上の暗線の間隔が  $1/v$  に縮小された結果として  $x$  軸上に強く分布した一方向の回折像となる。2 つ以上の長方形の開口がついて上である角度を成している時には、それぞれの開口の長辺に直角な方向の回折像の合成したものが観られる。そして互の強度比はそれぞれの開口の面積によって決まる。短辺が等しければ長辺の長さ依存した強度の比となる。また長辺の長さが短辺の長さより比較的大きければ短辺が直線上でなくとも結果には強い影響を与えない。

### 実験装置

観察光学系は He-Ne ガスレーザーから発振された波長 632.8 nm の光ビームを顕微鏡対物レンズにより拡げた後、単レンズにより平行光束とする。この平行光束中に種々の開口を持ったついでを光束に直角となるように置き、その後方には無限遠にピントを合わせた焦点距離  $f=55$  mm の写真用レンズを置いた。このとき写真用レンズの焦点上にフラウンホーフェル回折像ができる。このままでは観察系としては像が小さく不適当なので、更に像面上後方に置いた顕微鏡対物レンズにより拡大回折像を通常のフィルム(ここではネオパンSS)で記録した。なお光学系は全て光学台に並べられて光軸が一致するよう設定した。

ここで用いられたアラビア数字形の開口は通常使われる錫薄などに開けられたピンホールなどの簡単な形ではないので、次のような手順により感光材料に写真撮影して作成した。希望の開口を整図用黒インクでトレーシングペーパー上に作図し、これを35ミリカメラにより20分の1の大きさに縮小撮影した後、現像処理をして得た。使ったフィルムは開口部と遮光面との境界線をはっきりつけるため、ガンマの高いホログラフィ用に作られたコダック SO-253 とした。また遮光面からの光の透過はあってはならないが、写真感光材料の場合完全に無くすることはできないので、開口部分に影響しない程度となるよう、遮光面濃度を高くすべく露光時間と現像時間を決めた。これによりついでに遮光面濃度は  $D=5$  程度にすることができ、実験に与える影響は無視しえた。一方開口部分はフィルムベース濃度が  $D=0.05$  程であった。使用したアラビア数字形開口は横 1.05 mm、縦 1.5

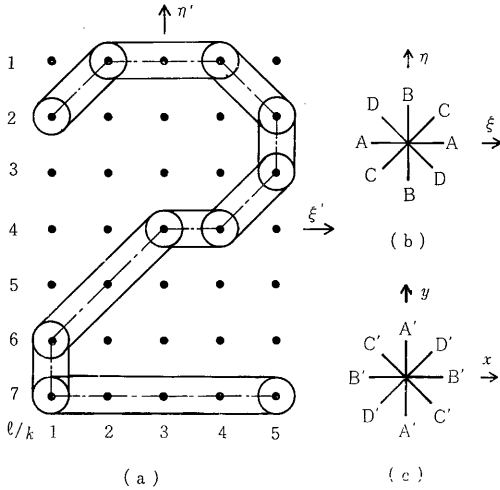


図2 数字開口の作成

(a)は各数字開口の作成方法を“2”を例として示した。破線で示した中心線に沿って幅  $2a$  の帯をとれば数字の“2”となる。破線を直線部分に分割すればその方向は4種類となるのでそれぞれの方向につけた記号を(b)に示してある。(c)は回折像上の腕につけた記号を示す。

mm の枠内に幅 0.15 mm で描かれたものである。作成方法は図2(a)により行なった。 $\xi'$  軸に数値  $k$  ( $=1\sim5$ ) をとり  $\eta'$  軸方向の座標を表わすとする。また数値  $l$  ( $=1\sim7$ ) は  $\eta'$  軸方向の座標を表わすとする。 $l, k$  によって定まる座標の  $\eta', \xi'$  軸方向それぞれの間隔は  $\nu a'$  である。ここでは  $\nu=3, a'=1.5$  mm であり  $\nu a'=4.5$  mm とした。 $l, k$  により指定される座標は全部で  $7\times5=35$  個の点となり各点に半径  $a'$  の円を描くことができる。この35個の点を適当に選びそこに半径  $a'$  の円を描いてそれらを連ねて数字開口を作成した。以下に“2”を例として述べる。数字の“2”の場合は図2(a)に示すように座標  $(l, k)$  が  $(2, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 4), (4, 3), (6, 1), (7, 1), (7, 5)$  である10個の点を取り、各点に半径  $a'$  の円を描く、続いてこれらの中心線(破線)をつなぎ、この中心線に沿って各円の縁をつないで数字“2”の開口を幅  $2a'=3$  mm で作成した。これを20分の1に縮小したものが実験に使った開口である。他の数学開口も同様にして作成した。

図2(b)は数字の中心線の方をを表わすための記号で  $\xi, \eta$  軸方向の中心線をそれぞれ AA, BB とし、これらの2等分線の方のものをも CC 及び DD とする。数字“2”の場合、図2(a)で AA に対応する線分は座標

表 中心線の線分の長さ

| 開口方向 | '1' | '2'            | '3'            | '4'          | '5'            | '6'            | '7'            | '8'            | '9'              | '0'            | 回折像方向 |
|------|-----|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|-------|
| AA   | 2   | 7<br>(4,2,1)   | 5<br>(2,2,1)   | 4<br>(4,3,2) | 9<br>(3,2,2)   | 7<br>(3,2,2)   | 4<br>(2,2,2)   | 6<br>(2,2,2)   | 6<br>(3,2,1)     | 4<br>(2,2)     | A'A'  |
| BB   | 6   | 2<br>(1,1)     | 2<br>(1,1)     | 7<br>(6,1)   | 4<br>(2,2)     | 5<br>(4,1)     | 3<br>(2,1)     | 4<br>(1,1,1,1) | 4<br>(3,1)       | 8<br>(4,4)     | B'B'  |
| CC   | 1.4 | 5.6<br>(2.8x2) | 4.2<br>(1.4x3) | 4.2          | 1.4            | 2.8<br>(1.4x2) | 4.2<br>(1.4x2) | 5.6<br>(1.4x4) | 4.2<br>(2,8,1,4) | 2.8<br>(1.4x2) | C'C'  |
| DD   | 0   | 1.4            | 4.2<br>(1.4x3) | 0            | 2.8<br>(1.4x2) | 2.8<br>(1.4x2) | 0              | 5.6<br>(1.4x4) | 2.8<br>(1.4x2)   | 2.8<br>(1.4x2) | D'D'  |
| 数分の和 | 9.4 | 16.0           | 15.4           | 15.2         | 17.2           | 17.6           | 11.2           | 21.2           | 17.0             | 17.6           |       |

(注)線分の長さの単位は数字作成時の基本間隔  $\nu a'=4.5$  mm を1とした値である。括弧で示した数値は各方向の線分の部分の値である。

(1, 2)~(1, 4) (4, 3)~(4, 4) 及び (7, 1)~(7, 5)の3本で長さは座標間隔  $\nu a$  を単位として、それぞれ2, 1及び4であり、この線分の和は7となる。BB に対応する線分は (2, 5)~(3, 5) と (6, 1)~(7, 1) の2本で長さは1と1で和は2である。CC に対応する線分は (1, 2)~(2, 1), (3, 5)~(4, 4) 及び (4, 3)~(6, 1) で長さは  $\sqrt{2}, \sqrt{2}$  及び  $2\sqrt{2}$  で和は  $4\sqrt{2}$  となる。ここに CC (DD もまた) の方向は AA (または BB) の方向に対し45度の傾きを持っているからその最短間隔はAA (または BB) 方向の  $\sqrt{2}$  倍となる。そして DD に対応する線分は (1, 4)~(2, 5) であり長さは  $\sqrt{2}$  となる。表は各数字開口の中心線の線分の長さとその和を図2(b)で示した中心線の方に対応させて作成したものである。但し CC, DD 方向は  $\sqrt{2}=1.4$  とした。表の回折像の方向とした記号は図2(c)の回折像の腕とした方向に対応するものであり、これは理論的考察で述べたことより、図2(b)で示した中心線の方の長辺を持つ矩形開口による回折像の腕の方向を表わしている。したがって  $\xi, \eta$  軸にそれぞれ平行な  $x, y$  軸がとってあるので  $AA \perp A'A', BB \perp B'B', CC \perp C'C', DD \perp D'D'$  となっている。

実験結果と検討

図3に長さ 1.5 mm 幅 0.15 mm の矩形開口の回折像と 1.05 mm x 1.5 mm 枠の辺の内側に接して幅 0.15 mm で描いた四辺形図形の回折像を示す。図3(a)は  $b=\nu a$  として  $\nu=10$  であり、回折像の  $x$  軸方向の強度分布と  $y$  軸方向の強度分布を調べた。(7)及び(10)式より、

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta y_0} = \frac{b}{a} = \nu \tag{12}$$

であり、回折像上での  $\Delta x_0$  と  $\Delta y_0$  よりこれを求めると(12)式と一致する結果を得た。よって  $y$  軸方向の強度分布

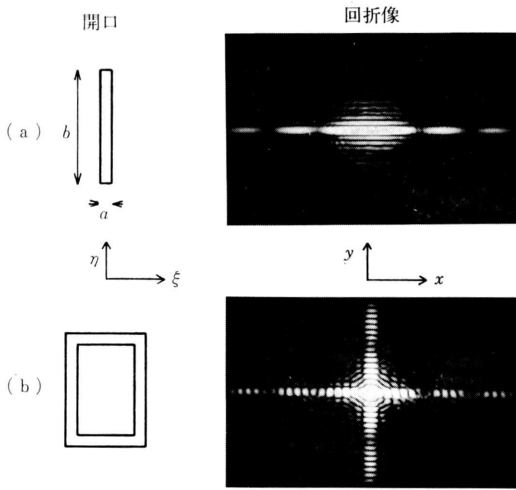


図3 短形開口とその組み合わせ開口の回折像

開口の幅（短辺に相当）は 0.15 mm であり，長辺は (a)では  $\eta$  軸方向に 1.5 mm の長さである．(b)の  $\eta$  軸方向の長さは (a)と同じであるが， $\xi$  軸方向は 1.05 mm である．回折像の強度は明るい程強く，暗くなる程弱いことを示す．

は  $x$  軸方向の強度分布の10分の1に縮小されたものとなっている．次に図3 (b)の開口の場合の回折像を調べた．この回折像は  $x$  軸方向の広い間隔を持った強度分布と  $y$  軸方向の狭い間隔の強度分布に注目すると，これは図3 (a)の回折像と一致する状態であった．これは図3 (b)の開口の  $\eta$  軸方向に長い辺（長さ 1.5 mm）を持つ部分による回折像の影響であると見なされる．一方図3 (b)の回折像の  $y$  軸方向に広い間隔を持つ強度分布と  $x$  軸方向に狭い間隔を持つ強度分布に注目する．この強度分布の縞間隔の比を写真上から求めると 7 : 1 となっていた．さて  $x$ 、 $y$  軸方向それぞれの広い間隔の強度分布の縞間隔の比を求めると 1.5 : 1 であり，狭い間隔については逆に 1 対 1.5 となっていた．これより，この場合の回折像は  $\xi$  軸方向に長さ 1.05 mm を持ち幅 0.15 mm の図3 (b)の開口の横に長い辺を持つ部分によるものであると見なされる．従って図3 (b)の回折像はその開口を縦方向に長さ 1.5 mm の長辺を持つ矩形開口と横方向に長さ 1.05 mm の長辺を持つ矩形開口の合成となっており， $x$  軸方向に特に明るい分布をし， $y$  軸方向にはそれよりほんの少し暗い分布をしたものとなって全体としては十字形の強度分布をしたものとなっている．

図4にアラビア数字の“1”～“9”及び“0”の回折縞を示す．この開口は実験に使ったフィルム上の数字開口像を引伸し焼付けしたものであり，数字が黒く反転したものになっている．回折縞は原点対称な動径方向に伸びた直線状の明るさの変化した斑点からなる腕を持ち，その腕は細いものや広がったものとなっている．回折縞の右側の(中央部)とした小さい写真は回折縞の中央部分の縞模様を比較するため露光を変えて撮影したものである．

ここで，図4の各数字開口による回折縞を表と対応させて検討する．表で線分が0となっている“1”，“4”，“7”は  $D'D'$  の方向に回折縞の腕が出ないことを示しており図4の回折縞もそれぞれこの方向に腕を持たないものとなっている．線分の和が大きい値程，その部分の開口面積が大きくなるのでその線分に対応する回折像の方向に特に明るい腕を持つことになる．“2”の  $AA$  及び  $CC$  方向の線分の長さはそれぞれ 7，5，6 であり， $BB$  及び  $DD$  方向の線分の長さはそれぞれ 2，1.4 となっており回折縞は対応する  $A'A'$  及び  $C'C'$  方向が特に強く， $B'B'$  及び  $D'D'$  方向は弱くなっている．“6”についても同じようなことが言え， $A'A'$ 、 $B'B'$  の方向が強く  $C'C'$ 、 $D'D'$  の方向には弱い．線分が単独で長い（または部分で長いものがあれば）開口はそれによる回折像の腕の幅が狭く，明るくなっている．“1”の  $B'B'$  方向 ( $BB$  の線分の長さ 6 に対応)，“4”の  $A'A'$  方向 ( $AA$  の線分の長さ 4 に対応) 及び  $C'C'$  方向 ( $CC$  の線分の長さ 4.2 に対応)，“7”の  $A'A'$  方向 ( $AA$  の線分の長さ 4 に対応) 及び  $C'C'$  方向 ( $CC$  の線分の長さ 4.2 に対応) はそれぞれその方向の腕の広い縞間隔が他の方向の開口部による狭い縞にほとんど影響されずはっきりしており，鋭い線状になっている．“2”の  $A'A'$  方向 “4”の  $B'B'$  方向，“5”の  $A'A'$  方向，“6”の  $B'B'$  方向，“0”の  $B'B'$  方向なども鋭い腕になっているが，同じ方向の短い線分による腕の広がりもあり，他の方向の開口部の影響による狭い間隔の縞模様が生じている．

部分の線分の長さが短いものからなっている開口は回折縞の腕もある程度の幅を持ったものとなっている．

“2”の  $B'B'$  方向，“3”の  $B'B'$  方向，“8”の  $B'B'$  方向はそれぞれ  $BB$  方向の縞分部分が 1 であり，特に顕著に現われている．回折縞の対称性を調べてみる．図4の全部について回折縞を  $\pi$  軸（写真の面に垂直方向）の回りに  $\pi$  だけ回転してやるともとの回折縞と全く同じ

数字形開口による回折縞

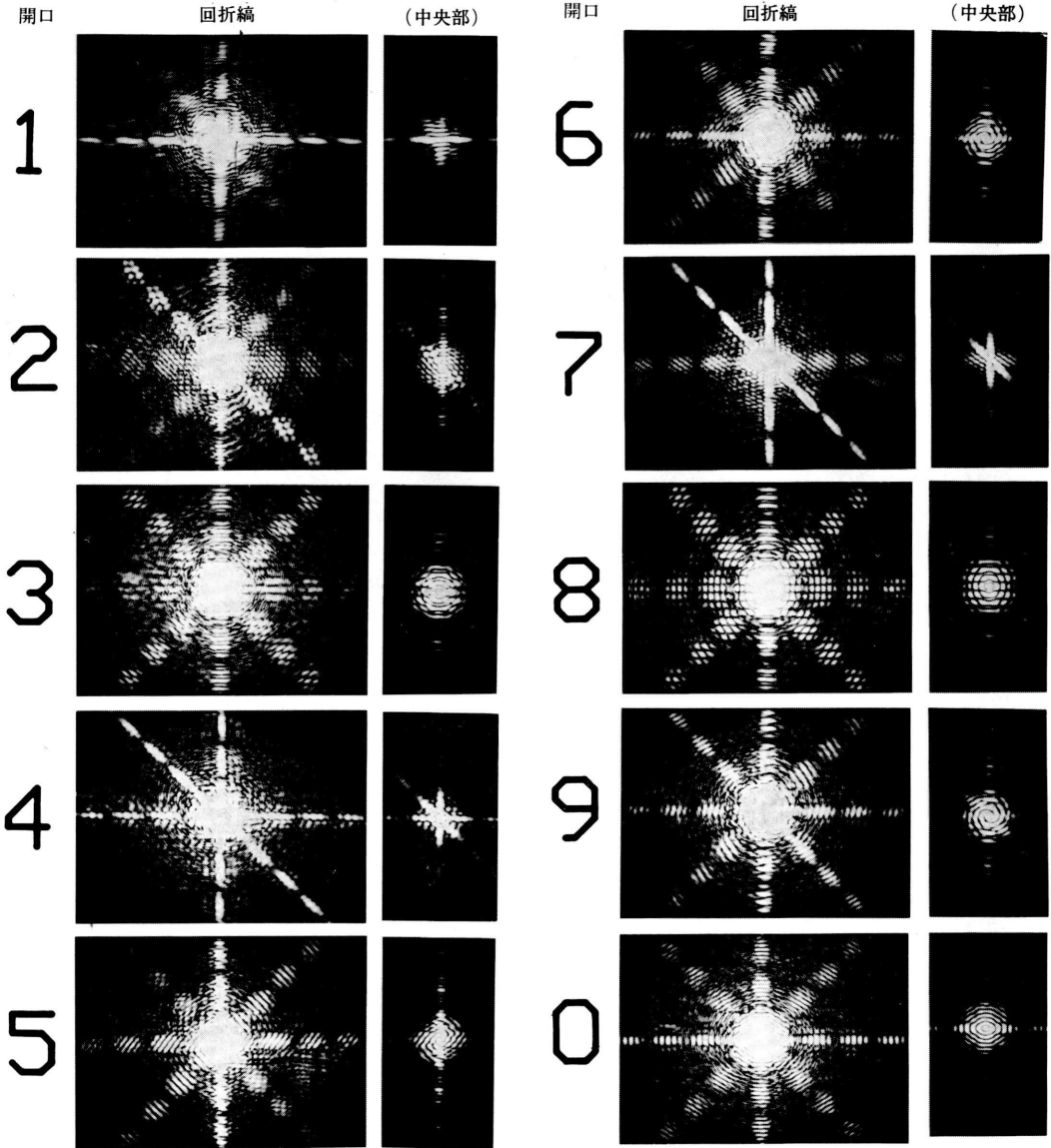


図4 アラビア数字の1～9及び0の開口とその回折像  
 各数字開口は実験に使ったつい立てとしてのフィルム像を引伸し焼付けしたもので、開口部分が黒くなっている。回折像の強度は明るい所が強く、暗い所が弱いことを示している。(中央部)とした写真は回折像の中央部分に露光を合わせて撮影したものである。

になることがわかる。これは回折縞が原点に対し点対称になっていることを意味する。よって各数字開口を逆さにした場合の回折縞も正しい位置での回折縞と同じになる。線対称な開口は“3”、“8”、“0”であるがこれらの回

折縞もまた線対称になっている。次に中央付近の回折縞も含めて各回折縞を比較すると“1”を別にして“2”と“5”が互に裏返した回折縞に似たものとなっている。これは“2”と“5”の数字が互に裏返したのに似てい

ることによる。“6”，“9”の回折縞が似ているのは“6”と“9”が $z$ 軸に $\pi$ 回転したのに似ていることによる。“3”，“8”，“0”は線対称図形模様になっている。“4”，“7”は似た回折縞でこれは表からもわかるように開口線分の AA, CC 及び DD 方向が同じであり，“4”の方が BB 方向が少し大きいことによる違いがあるだけである。

### 要 約

アラビア数字形開口によるフラウンホーフェル回折像は少し複雑な縞模様を呈するが、これを短形開口によるフラウンホーフェル回折像の組み合わせによって説明することを試みた。そのため1～9及び0の数字開口は等しい線幅を持った矩形開口の連なりとなるように作り、写真フィルム上に焼付けた。このフィルム上に作られた

数字開口による回折縞を拡大撮影し、別に作られた同じ幅を持つ矩形開口による回折像と比較検討した。その結果ここで作られた直線の連なりからなる数字開口は対応する種々の線分の矩形開口の集まりとみなすことができた。数字開口は所々で曲線を持ってはいたが検討においては無視し得るものであった。通常使われる数字はここで用いられたような特別な形状ではないが各々の数字開口による回折縞の共通点や異なる点を調べた結果から、回折縞の点対称性や線対称性は保存されるものとみられ曲線部分を最っと含む数字開口の場合にも、その対称性から特に明るい腕を持つ回折縞がその数字開口の特徴として現われるとみられる。

### 文 献

- 1) M. Born and E. Wolf : *Principles of OPTICS*, 4th ed., Pergamon Press, London, 1970, p. 370